Cours de mathématiques pour la classe de Seconde

Vincent Dujardin - Florent Girod [1]

Année scolaire 2014 / 2015

1. Externat Notre Dame - Grenoble

Table des matières

Chapitre 0

Ensembles de nombres et intervalles de $\mathbb{R}$

Bulletin Officiel (B.O)

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'éléments d'un ensemble, d'un sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples, à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
connaître les ensembles de nombres (et leurs notations)						
utiliser les symboles $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$						
traduire l'appartenance à un intervalle de $\mathbb{R}$						
utiliser les connecteurs logiques « et », « ou »						

1) Principaux ensembles de nombres

1 - 1) Les ensembles

Notation	Liste	Description
$\mathbb{R}$	tous les nombres que vous connaissez	nombres **réels**
$\mathbb{N}$	$\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\}$	nombres **entiers naturels**
$\mathbb{Z}$	$\{\dots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\}$	nombres **entiers relatifs**

On définit aussi les sous-ensembles suivants :
- $\mathbb{R}^*$: tous les nombres réels sauf 0 ;
- $\mathbb{R}^+$: tous les nombres réels positifs ;
- $\mathbb{R}^-$: tous les nombres réels négatifs.

1 - 2) Appartenance et inclusion

Certains nombres **appartiennent** à un ensemble donné ; on note cette appartenance avec le symbole $\in$

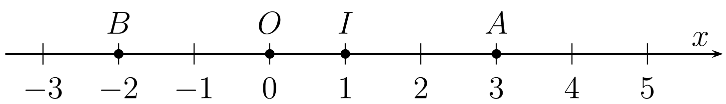
Par exemple, $-5 \in \mathbb{Z}$.

Certains ensembles sont **inclus** dans d'autres ensembles ; on note cette inclusion avec le symbole $\subset$

Par exemple, si un nombre est entier naturel, alors il est entier relatif ; cela se note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2) L'axe des réels

On peut représenter les nombres réels sur une droite graduée :
- On définit un repère (O, I) : O est l'origine (abscisse 0), I définit l'unité (abscisse 1).



- Chaque point est repéré par son **abscisse**. Ici : $A(3)$ et $B(-2)$.
- L'axe des réels n'a pas de borne : il est infini à gauche et à droite.
- On note ∞ la notion d'infini : $-\infty$ est l'infini à gauche, et $+\infty$ est l'infini à droite.

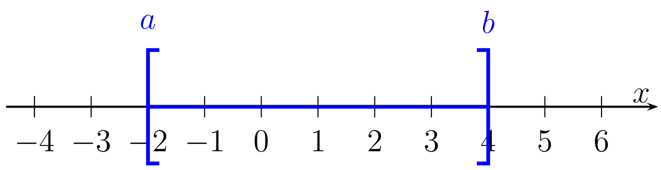
3) Intervalles de $\mathbb{R}$

a et b sont deux nombres, avec $a < b$

Exemples :

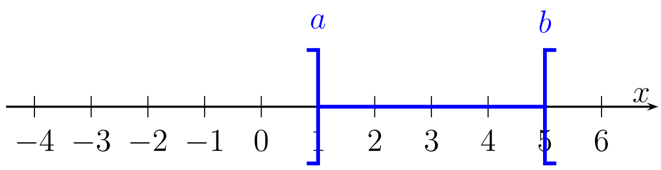
« x appartient à l'intervalle fermé $[a\ ;\ b]$ »

- signifie $a \leqslant x \leqslant b$
- se note $x \in [a\ ;\ b]$



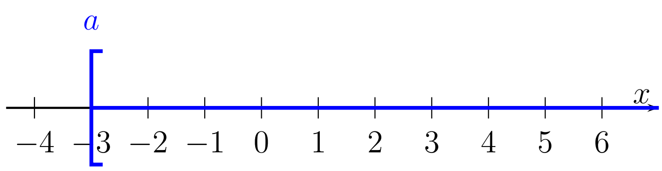
« x appartient à l'intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$ »

- signifie $a < x < b$
- se note $x \in]a\ ;\ b[$



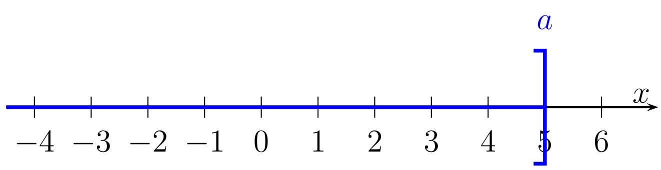
« x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ »

- signifie $a \leqslant x$
- se note $x \in]a\ ;\ +\infty[$



« x appartient à l'intervalle $]-\infty\ ;\ a]$ »

- signifie $x \leqslant a$
- se note $x \in]-\infty\ ;\ a]$



Remarque et vocabulaire :

- $\in$ signifie « appartient » et $\notin$ signifie « n'appartient pas » ;
- a et b sont les bornes de l'intervalle ;
- Lorsque la borne **appartient** à l'intervalle, elle est dite « fermée » : le crochet est orienté vers la borne ;

– Lorsque la borne **n'appartient pas** à l'intervalle, elle est dite « ouverte » : le crochet « tourne le dos » à la borne.

exemples : avec $I = [-2\ ;\ 6[$, on sait que $2 \in I$ et $6 \notin I$

avec $J =]0\ ;\ 7[$, on sait que $0 \notin J$ et $7 \notin J$

– L'infini n'étant pas un nombre, cette borne est toujours ouverte.

– Il y a une infinité de nombres dans un intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$).

4) Union d'ensembles

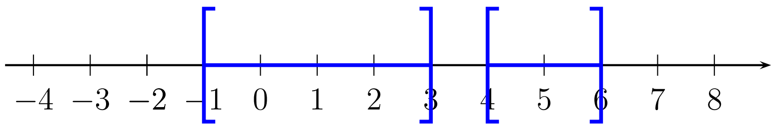
Avec A et B deux ensembles de nombres.

$x \in A \cup B$
* se dit « x appartient à A union B »
* signifie $x \in A$ ou $x \in B$ (x appartient à A, à B, ou aux deux)

Application :

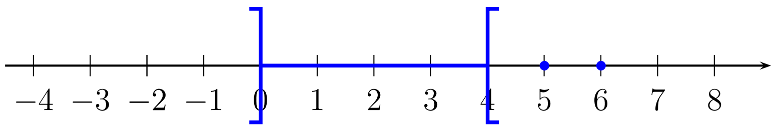
* $\boxed{x \in [-1\ ;\ 3] \cup [4\ ;\ 6]}$ signifie que x est soit un nombre compris entre -1 et 3, soit un nombre compris entre 4 et 6.

On peut schématiser de la manière suivante :



* $\boxed{x \in]0\ ;\ 4[\cup \{5\ ;\ 6\}}$ signifie que x est soit un nombre compris (strictement) entre 0 et 4, soit un nombre égal à 5, soit un nombre égal à 6.

On peut schématiser de la manière suivante :



Ou inclusif, ou exclusif

« Entrée ou dessert » sur un menu signifie l'un ou l'autre, pas les deux pour le prix indiqué : le « ou » est exclusif.

« Pour Noël, j'aimerais avoir un PC ou un voyage aux USA » : le « ou » est inclusif : on souhaiterait évidemment avoir les deux.

> En mathématiques, le **ou** est **inclusif** (l'un, l'autre ou les deux)

Dans le langage, « Et » et « Ou » peuvent piéger...

« Les personnes ayant droit à des réductions à la SNCF sont celles de moins de 25 ans et celles de plus de 65 ans. »
On comprend :
« Une personne a une réduction si elle a moins de 25 ans ou plus de 65 ans (elle ne peut pas avoir les deux à la fois). »

En mathématiques :
« les solutions sont les nombres compris entre -2 et 0 (inclus) et entre 4 et 5 (inclus) »
On peut dire aussi :
« L'ensemble des solutions est $[-2\ ;\ 0] \cup [\ 4;\ 5]$: x est solution équivaut à dire qu'il appartient à $[-2\ ;\ 0]$ ou à $[4\ ;\ 5]$.

5) Intersection d'ensembles

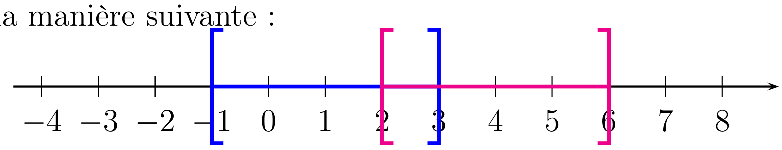
Avec A et B deux ensembles de nombres.

> $x \in A \cap B$
> * se dit « x appartient à A inter B »
> * signifie $x \in A$ et $x \in B$ (x appartient à la fois à A et à B)

Application :

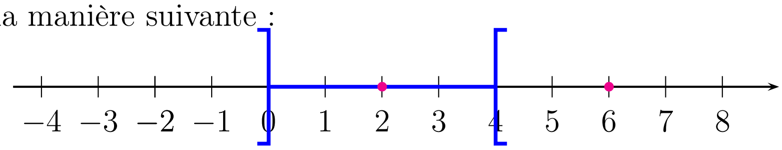
* $\boxed{x \in [-1\ ;\ 3] \cap [2\ ;\ 6]}$ signifie que x est à la fois un nombre compris entre -1 et 3, et compris entre 2 et 6 : il est donc compris entre 2 et 3. En fait, $[-1\ ;\ 3] \cap [2\ ;\ 6] = [2\ ;\ 3]$

On peut schématiser de la manière suivante :



* $\boxed{x \in]0\ ;\ 4[\cap \{2\ ;\ 6\}}$ signifie que x est à la fois un nombre compris (strictement) entre 0 et 4, et soit égal à 2, soit égal à 6 : il est égal à 2. En fait, $]0\ ;\ 4[\cap \{2\ ;\ 6\} = \{2\}$

On peut schématiser de la manière suivante :



Chapitre 1

Algèbre

Bulletin Officiel (B.O)

Contenu	Capacités Attendues	Commentaires
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue de la résolution de problèmes	– Associer à un problème une expression algébrique. – Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. – Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.	Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples						
montrer que deux expressions sont égales ou pas						

1) Somme, différence, produit, quotient, opposé, inverse (rappels)

1 - 1) quelques synonymes

Signe	Opération	Synonyme
$+$	Addition	*ajouter, sommer, ...*
$-$	Soustraction	*enlever, retirer, ...*
$\times$	Multiplication	*répéter plusieurs fois, ...*
$\div$	Division	*partager en parts égales, ...*

1 - 2) Somme et différence

Soustraire un nombre x équivaut à ajouter son opposé $-x$.

Autrement dit : $\ldots - x$ équivaut à $\ldots + (-x)$

EXEMPLE : $3 - 2 = 3 + (-2)$

REMARQUE : tous les nombres ayant un opposé, les mathématiciens considèrent souvent les différences comme des sommes.

1 - 3) Produit et quotient

Diviser par un nombre x équivaut à multiplier par son inverse $\dfrac{1}{x}$

Autrement dit : $\dfrac{\ldots}{x}$ équivaut à $\ldots \times \dfrac{1}{x}$

EXEMPLE : $\dfrac{6}{2} = 6 \times \dfrac{1}{2} = 6 \times 0,5$

QUESTION : cette proposition est-elle vraie ou fausse : « tous les nombres ont un inverse » ?

1 - 4) Déterminer la nature d'une expression

Les expressions algébriques comportent généralement (ou presque) les quatre opérations.

La **dernière opération** que l'on utilise, **en respectant les priorités de calcul**, pour évaluer l'expression donne son type : une somme (+), une différence (-), un produit ($\times$) ou un quotient ($\div$)

EXEMPLES : pour tout nombre x, $(x-1)(x+2)$ est *un produit.*

pour tout nombre x, $x^2 + x - 2$ est *une somme.*

2) Transformations d'expressions (rappels)

2 - 1) Réduire et ordonner

Définition 1 : **Ordonner** une expression, c'est **ranger** les termes **par ordre décroissant** des puissances de la variable.

Exemple : pour x un nombre, ordonner : $3x^2 - 8x - 2 + 4x^3$

réponse : $3x^2 - 8x - 2 + 4x^3 = 4x^3 + 3x^2 - 8x - 2$

Définition 2 : **Réduire** une expression, c'est la simplifier en **regroupant** les mêmes puissances des parties littérales (lettres).

Exemple : pour x un nombre, réduire et ordonner l'expression : $2x + 3 + x^2 + 4x - 5x^2 - 2$

réponse : $2x + 3 + x^2 + 4x - 5x^2 - 2 = x^2 - 5x^2 + 2x + 4x + 3 - 2 = -3x^2 + 6x + 1$

Dans Xcas, la commande pour réduire et ordonner est normal(expression)

2 - 2) Développer

Définition 3 : **Développer** un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une **somme**.

Vocabulaire : les éléments d'une somme s'appellent les **termes**.

Propriété 1 : distributivité et double distributivité

Pour a, b, c, d quatre nombres, on a

1. $a(b + c) = ab + ac$
2. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Preuve : vu au Collège

Exemple : développer, réduire et ordonner $(4x + 3)(8 - x)$

réponse :
$$\begin{aligned}(4x+3)(8-x) &= 4x \times 8 + 4x \times (-x) + 3 \times 8 + 3 \times (-x)\\ &= 32x - 4x^2 + 24 - 3x\\ &= -4x^2 + 32x - 3x + 24\\ &= -4x^2 + 29x + 24\end{aligned}$$

Dans Xcas, la commande pour développer une expression est expand(expression)

2 - 3) Factoriser

Définition 4 : **Factoriser** une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un **produit**.

VOCABULAIRE : les éléments d'un produit s'appellent les **facteurs**.

En seconde, il y a deux méthodes pour factoriser, à appliquer dans l'ordre :

Méthode 1 : On cherche s'il y a un **facteur commun apparent**.

EXEMPLE : Factoriser l'expression $(x+1)(x+3)-2(x+1)$

réponse :
$$\begin{aligned}(x+1)(x+7)-2(x+1) &= (x+1)\left[(x+7)-2\right] \\ &= (x+1)\left[x+7-2\right] \\ &= (x+1)(x+5)\end{aligned}$$

Méthode 2 : On regarde si on reconnaît une **identité remarquable** connue.

EXEMPLES : pour x un nombre, factoriser au maximum les expressions suivantes

1. $16x^2+24x+9$
2. $36-(x+3)^2$

réponses :
$$\begin{aligned}16x^2+24x+9 &= (4x)^2+2\times 4x\times 3+3^2 \\ &= (4x+3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}36-(x+3)^2 &= 6^2-(x+3)^2 \\ &= \left[6-(x+3)\right]\left[6+(x+3)\right] \\ &= \left[6-x-3\right]\left[6+x+3\right] \\ &= (3-x)(9+x)\end{aligned}$$

Dans Xcas, la commande pour factoriser une expression est factor(expression)

3) Trois méthodes pour démontrer une égalité

Important :

On ne change pas un nombre lorsque l'on réduit, ordonne, développe, factorise, met au même dénominateur son expression.

On ne fait que le transformer.

Pour montrer par le calcul que deux expressions A et B de formes différentes sont en fait égales, on peut utiliser une des trois méthodes de rédaction ci-dessous.

Méthode 3 : on transforme A jusqu'à trouver B.

Remarque : on peut aussi partir de B pour trouver A

Exemple : montrer que pour tout x, $(x+2)^2+3x=x^2+7x+4$

réponse :
$$\begin{aligned}(x+2)^2+3x&=x^2+2\times 2x+2^2+3x\\&=x^2+4x+4+3x\\&=x^2+7x+4\end{aligned}$$

Méthode 4 : on calcule la différence entre A et B, c'est-à-dire $A-B$. Si elle est nulle, alors $A=B$.

Exemple : montrer que pour tout x, $(x+2)^2+3x=x^2+7x+4$

réponse :
$$\begin{aligned}(x+2)^2+3x-(x^2+7x+4)&=x^2+2\times 2x+2^2+3x-x^2-7x-4\\&=x^2-x^2+4x+3x-7x+4-4\\&=0\end{aligned}$$

Méthode 5 : on transforme A, on transforme B pour obtenir une même troisième expression C.

Exemple : vérifier que pour tout x réel, $(x+1)(x+2)=x(x+3)+2$

réponse : d'une part, $(x+1)(x+2)=x^2+2x+x+2=x^2+3x+2$

D'autre part, $x(x+3)+2=x^2+3x+2$

Remarque : comment démontrer que deux expressions ne sont pas égales ?

Par exemple, comment montrer que les expressions $(x+2)^2-(x+2)(x+1)$ et x^2-6x+2 ne sont pas égales ?

4) Égalités équivalentes (rappels)

Remarque importante : $A - B = 0$ équivaut à $A = B$

PREUVE : on passe de la première à la seconde en ajoutant B.

Définition 5 : Deux égalités sont équivalentes si lorsque l'une est vraie, l'autre aussi (et donc lorsque l'une est fausse, l'autre aussi).

REMARQUE : le signe $\Leftrightarrow$ signifie « équivalent à ». En seconde, on préférera l'écriture en français plutôt que ce signe.

Propriété 2 : En ajoutant ou en soustrayant le même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente.

PREUVE : propriété admise

Propriété 3 : En multipliant ou en divisant par le même nombre non nul les deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente.

PREUVE : propriété admise

Propriété 4 : En réduisant, en développant, en factorisant, ou en mettant au même dénominateur **un seul** ou **les deux membres d'une égalité**, **on obtient une égalité équivalente**.

PREUVE : on ne change pas un nombre en le factorisant, le développant, en mettant au même dénominateur. On change sa forme : l'égalité est inchangée, donc équivalente.

Chapitre 2

Équations et inéquations : bases algébriques et approche graphique

Bulletin Officiel (B.O)

CONTENU	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations	– Résoudre une équation se ramenant au premier degré.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser en particulier, les représentations graphiques données sur un écran par une calculatrice, un logiciel.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	– Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$, $f(x) < g(x)$	Pour un même problème, il s'agit de : – combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, – mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
résoudre graphiquement et algébriquement une équation						
résoudre graphiquement et algébriquement une inéquation						

1) (In)équation

Les méthodes qui permettent de résoudre des (in)équations s'appuient sur les propriétés vues au chapitre 1, rappelées ci-dessous :

Propriété 2 : En ajoutant ou en soustrayant le même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente.

Propriété 3 : En multipliant ou en divisant par le même nombre non nul les deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente.

Propriété 4 : En réduisant, en développant, en factorisant, ou en mettant au même dénominateur **un seul** ou **les deux membres d'une égalité**, **on obtient une égalité équivalente**.

1 - 1) Résoudre une équation

Une équation est une **égalité** entre deux membres ; un membre ou les deux membres de l'égalité contiennent dans leur expression une ou plusieurs inconnues qui sont notées avec des lettres (habituellement x, y, t …)

Définition 1 : Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue (si elles existent) pour que l'égalité de départ soit vérifiée.

Exemple : on considère l'équation $3x + 2 = 14$; l'inconnue est le nombre représenté par la lettre x.
Le nombre 4 est solution puisque $3 \times 4 + 2 = 12 + 2 = 14$ et c'est dans ce cas la seule solution :
on note : $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}$

Méthode 1 : pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Exemple détaillé : résolution de l'équation $7x + 3 = 2x - 5$

L'idée est d'isoler progressivement l'inconnue ; dans l'exemple qui suit, on va chercher à ne mettre que des nombres dans le membre de droite, et les inconnues dans le membre de gauche de l'égalité.

écriture	justification de l'équivalence	commentaire
$7x + 3 = 2x - 5$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on « élimine » $+3$ en ajoutant son opposé : -3
$7x + 3 - 3 = 2x - 5 - 3$		
$\Leftrightarrow$	propriété 4	on réduit les écritures
$7x = 2x - 8$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on « élimine » $2x$ en ajoutant son opposé : $-2x$
$7x - 2x = 2x - 8 - 2x$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on réduit les écritures
$5x = -8$		
$\Leftrightarrow$	propriété 3	on divise par 5
$\dfrac{5x}{5} = \dfrac{-8}{5}$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on réduit les écritures
$x = -\dfrac{8}{5}$		

Conclusion : cette équation a une seule solution $-\dfrac{8}{5} = -1,6$; $\boxed{\mathcal{S} = \{-1,6\}}$

Méthode 2 : pour résoudre une équation à une inconnue, on cherche à se ramener au cas précédent en utilisant une **équation produit** en faisant des transformations algébriques (essentiellement des factorisations).

Exemple détaillé : résolution de l'équation $(x + 1)(x + 3) - 2(x + 1) = 0$

On factorise l'expression $(x + 1)(x + 3) - 2(x + 1)$ qui possède un facteur commun :

$$\begin{aligned}(x+1)(x+7) - 2(x+1) &= (x+1)\,[(x+7) - 2] \\ &= (x+1)\,[x + 7 - 2] \\ &= (x+1)(x+5)\end{aligned}$$

L'équation précédente est donc équivalente (d'après la propriété 4) à $(x + 1)(x + 5) = 0$

D'après la règle du « produit nul », cette équation produit est équivalente à :
$x + 1 = 0$ ou $x + 5 = 0$

Cela donne au final deux solutions (obtenues en résolvant les deux équations du premier degré à une inconnue $x + 1 = 0$ et $x + 5 = 0$) : $\boxed{\mathcal{S} = \{-5\ ;\ -1\}}$

1 - 2) Résoudre une inéquation

Une inéquation est une **inégalité** entre deux membres ; un membre ou les deux membres de l'égalité contiennent dans leur expression une ou plusieurs inconnues ; l'inégalité peut être stricte ($<$ ou $>$) ou large ($\leqslant$ ou $\geqslant$).

Définition 2 : Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue (si elles existent) pour que l'inégalité de départ soit vérifiée.

Les solutions peuvent être :
- aucune ; on dit alors « ensemble vide » et on note $\mathcal{S} = \emptyset$; exemple : $x^2 < -2$
- n'importe quel nombre ; on note $\mathcal{S} = \mathbb{R}$; exemple : $x^2 \geqslant -5$
- un intervalle ou une réunion d'intervalles

Méthode 3 : résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue

Cette méthode utilise les mêmes principes que pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue ; s'ajoute la propriété suivante :

Propriété 5 : Une inégalité change de sens si on la multiplie ou la divise par un nombre *négatif*.

Exemple détaillé : résolution de l'équation $-\frac{1}{3}x - 2 \leqslant 7$

L'idée est d'isoler progressivement l'inconnue ; dans l'exemple qui suit, on va chercher à ne mettre que des nombres dans le membre de droite, et les inconnues dans le membre de gauche de l'égalité.

écriture	justification de l'équivalence	commentaire
$-\frac{1}{3}x - 2 \leqslant 7$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on « élimine » -2 en ajoutant son opposé : 2
$-\frac{1}{3}x - 2 + 2 \leqslant 7 + 2$		
$\Leftrightarrow$	propriété 4	on réduit les écritures
$-\frac{1}{3}x \leqslant 9$		
$\Leftrightarrow$	propriétés 3 et 5	on multiplie par (-3)
$-\frac{1}{3}x \times (-3) \geqslant 9 \times (-3)$		
$\Leftrightarrow$	propriété 2	on réduit les écritures
$x \geqslant -27$		

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = [-27\ ;\ +\infty[}$

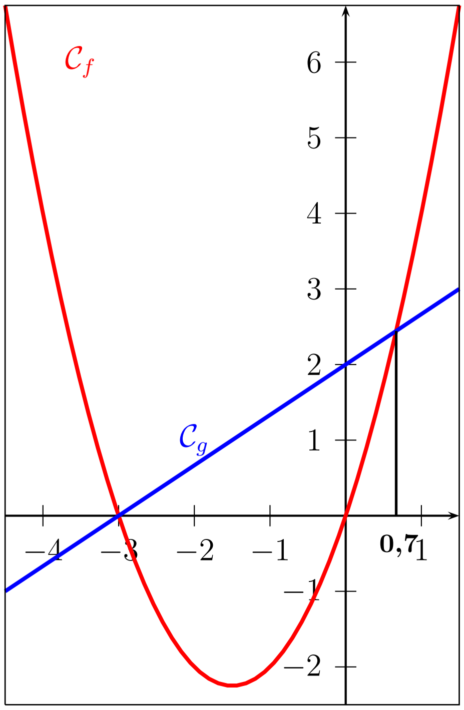
2) Résolutions graphiques

2 - 1) Équation

Cherchons à résoudre l'équation $x^2 + 3x = \dfrac{2}{3}x + 2$

> **Méthode 4** : pour résoudre graphiquement une équation, on trace dans un repère les représentations graphiques des fonctions correspondantes et on cherche le ou les points d'intersection.

Dans l'exemple précédent, on pose $f(x) = x^2 + 3x$ et $g(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$ et on va tracer leurs représentations graphiques respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:



On lit donc, aux erreurs de précision près, que les solutions sont -3 et 0,7.

Remarques :
- Rien ne dit qu'il n'y a pas que les solutions conjecturées graphiquement.
- On peut « valider » la conjecture graphique en remplaçant la ou les valeurs trouvées dans l'équation de départ.
- Si on est amené à résoudre algébriquement et graphiquement une équation, on s'assurera de la **cohérence** des résultats donnés par les deux méthodes.

2 - 2) Inéquation

Cherchons à résoudre l'inéquation $x^2 + 3x \geqslant \dfrac{2}{3}x + 2$

Méthode 5 : pour résoudre graphiquement une inéquation, on trace dans un repère les représentations graphiques des fonctions correspondantes et on cherche le ou les intervalles où la courbe représentant une fonction est **au-dessus** (ou en-dessous selon le sens de l'inégalité) de l'autre courbe.

En reprenant le tracé précédent, on cherche à savoir quand la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$: on conjecture que c'est le cas sur $]-\infty\,;\,-3] \cup [0,7\,;\,+\infty[$

Remarques :

- On ne sait pas grand chose de ce qui se passe en dehors de la fenêtre graphique …
- On peut « tester » la conjecture graphique en remplaçant x par des valeurs numériques dans l'inéquation de départ.
- Si on est amené à résoudre algébriquement et graphiquement une inéquation, on s'assurera de la **cohérence** des résultats donnés par les deux méthodes.

Chapitre 3

Modéliser par des fonctions

Bulletin Officiel (B.O)

Contenu	Capacités Attendues	Commentaires
Fonctions Image, antécédent, courbe représentative	– Traduire le lien entre deux quantités par une formule. Pour une fonction définie par une courbe, un tableau de donnée ou une formule : – identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ; – déterminer l'image d'un nombre ; – rechercher les antécédents d'un nombre.	Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur $\mathbb{N}$ voire des fonctions de deux variables (aire en fonction des dimensions) sont à donner.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
traduire le lien entre deux grandeurs par une formule						
associer à un problème une expression algébrique						
pour une fonction définie par une courbe, un tableau ou une expression : – identifier la variable, éventuellement l'ensemble de définition ; – déterminer l'image d'un nombre ; – rechercher des antécédents d'un nombre.						

1) Modéliser par une fonction

Deux grandeurs peuvent varier tout en étant liées. Ce lien peut s'exprimer par un tableau de données, une formule ou un graphique.

Dans certains cas, on peut modéliser ce lien par une fonction.

Définition 1 : fonction numérique à une variable

Définir une fonction f sur un ensemble de nombres $\mathcal{D}$, c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un unique nombre, que l'on note $f(x)$.

NOTATIONS ET VOCABULAIRE :

- $\mathcal{D}$ est **l'ensemble de définition** de f : toutes les valeurs que peut prendre la variable x.
- On peut noter l'association ainsi : $\boxed{f\ :\ x \mapsto f(x)}$ ou $\boxed{f(x) = \ldots}$
- f est **le nom** donné à la fonction
- $\mapsto$ représente l'association entre x et $f(x)$ (c'est la fonction)
- $f(x)$ est **l'image** de x (c'est un nombre)
- x est **un antécédent** de $f(x)$ (c'est un nombre)

REMARQUES :

- On peut nommer la variable et la fonction comme on le souhaite : $truc\ :\ a \mapsto truc(a)$
- Les parenthèses n'ont pas le même rôle que dans un calcul.

EXEMPLES :

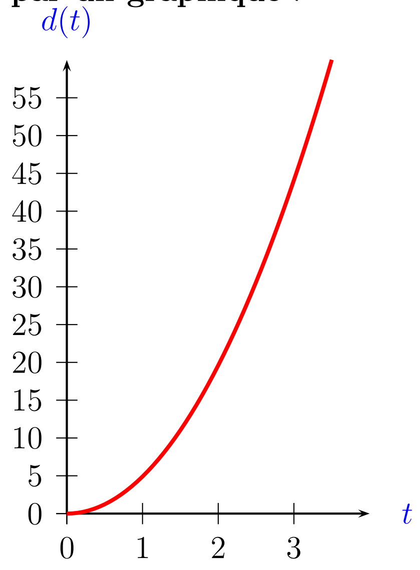
Un objet est lâché sans vitesse initiale. On peut donner la distance entre cet objet en chute libre et sa position initiale, en fonction de la durée de sa chute. A chaque valeur du temps, on associe une distance. Cette même situation va être décrite de trois manières différentes, pour illustrer trois manières de représenter une fonction.

Une fonction peut être donnée par un tableau de valeurs :

temps (en secondes)	0	1	2	3
distance (en mètres)	0	4,9	19,6	44,1

La **variable** est dans ce cas le temps.
La ligne où est donné le temps est la ligne des **antécédents**.
La ligne où est donnée la distance est la ligne des **images**.

Une fonction peut être donnée par un graphique :



Une fonction peut être donnée par une expression :

La **variable** est la durée (le temps), noté t ; on a ici : $t \geqslant 0$

On définit alors la fonction distance, notée d sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $\boxed{d : t \mapsto 4,9 \times t^2}$

On peut retrouver par exemple le fait que l'image de 1 par la fonction d est égale à 4,9 (ce qui se note $d(1) = 4,9$).

2) Ensemble de définition

2 - 1) Définition

Définition 2 : ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction est **l'ensemble des nombres** pour lesquels **on peut déterminer l'image** par la fonction.

REMARQUE : Pour une fonction f, on a l'habitude de noter l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

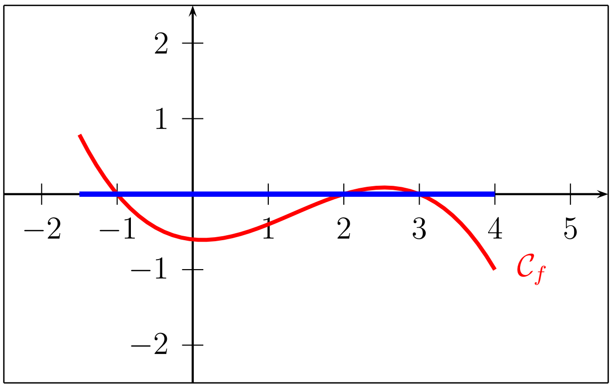
2 - 2) Méthodes

Méthode 1 : l'ensemble de définition peut dépendre de la situation qui est à traiter.
Si on reprend l'exemple de la fonction décrivant la chute d'un objet en fonction du temps à partir duquel on l'a lâché, la variable t est positive. On a alors : $\mathcal{D}_d = [0\ ;\ +\infty[$.

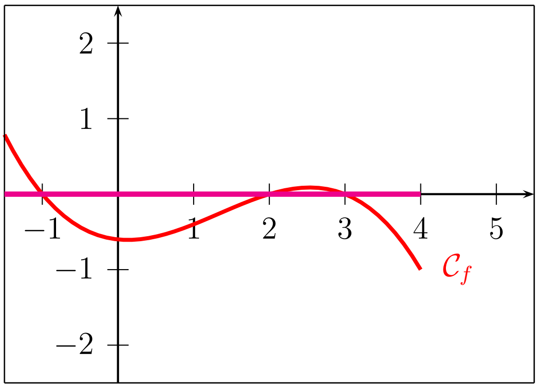
Méthode 2 : Pour déterminer graphiquement l'ensemble de définition, on repère les « bouts » de la courbe : leurs abscisses correspondent aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

Convention : Lorsque la courbe touche le cadre, on considère qu'elle se poursuit sans limite. La borne de $\mathcal{D}_f$ est $+\infty$ ou $-\infty$, sauf indication contraire.

Exemples :



$\mathcal{D}_f$: $[-1,5\,;4]$



$\mathcal{D}_f$: $]-\infty\,;4]$

Méthode 3 : (fonction homographiques)
Pour déterminer algébriquement l'ensemble de définition d'une fonction homographique, on retire de $\mathbb{R}$ les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites).

3) Courbe représentative

Dans ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

3 - 1) notion de courbe représentative d'une fonction

Définition 3 : courbe représentative

Dans un repère, la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points du plan tels que :

1. L'abscisse appartient à $\mathcal{D}_f$.
2. L'ordonnée est l'image de l'abscisse par f.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans la suite de ce chapitre.

3 - 2) Utiliser

Propriété 1 : appartenance d'un point à une courbe

Avec une fonction f, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative :

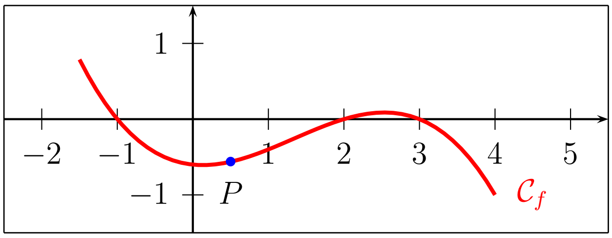
$$M(x_M;y_M) \in \mathcal{C}_f$$

équivaut à

$$x_M \in \mathcal{D}_f \text{ et } y_M = f(x_M)$$

Preuve : découle directement de la définition

Exemple : A l'aide de la représentation graphique ci-dessous, on lit que 0,5 a pour image -0,6 ; on donc peut écrire que $P(0,5\ ;\ -0,6) \in \mathcal{C}_f$



Méthode 4 : pour montrer qu'un point $M(x_M; y_M)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_f$, il suffit :
– Soit de vérifier que $x_M \notin \mathcal{D}_f$
– Soit de vérifier que $f(x_M) \neq y_M$

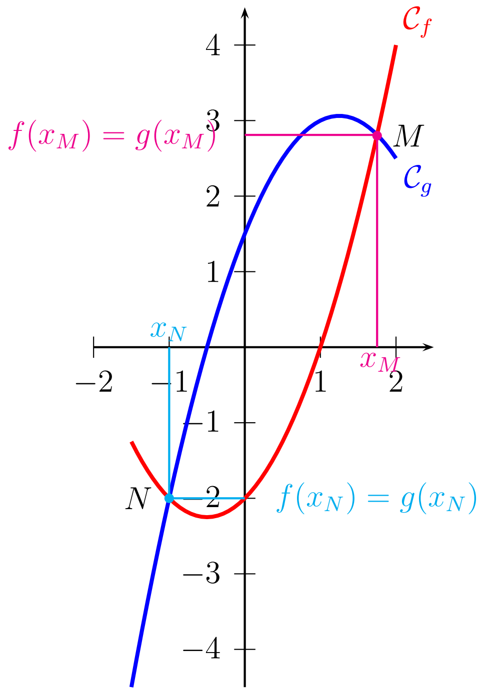
Propriété 2 : intersection de deux courbes

$M(x_M; y_M)$ appartient à **l'intersection** des courbes représentative de deux fonctions f et g (définies sur un domaine $\mathcal{D}$)

équivaut à

x_M est solution de **l'équation** $f(x) = g(x)$ sur $\mathcal{D}$

EXEMPLE :



AUTRE FORMUALTION : les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

PREUVE :

$\Rightarrow$
Si $M(x_M; y_M)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$, alors $y_M = f(x_M)$ et $y_M = g(x_M)$; donc x_M est solution de $f(x) = g(x)$.

$\Leftarrow$
Si x_M est solution de $f(x) = g(x)$ sur $\mathcal{D}$, alors : $x_M \in \mathcal{D}$, $M(x_M; y_M) \in \mathcal{C}_f$ et $M(x_M; y_M) \in \mathcal{C}_g$ aussi. M est bien à l'intersection des deux courbes.

4) Image, antécédent(s)

4 - 1) A partir d'un tableau de valeurs

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-0,6	-0,4	0	0	-1

Méthode 5 : utilisation du tableau
– l'image de 1 est -0,4 ; elle se lit sur la deuxième ligne du tableau ;
– des antécédents de 0 sont -1, 2 et 3 ; ils se lisent sur la première ligne du tableau.

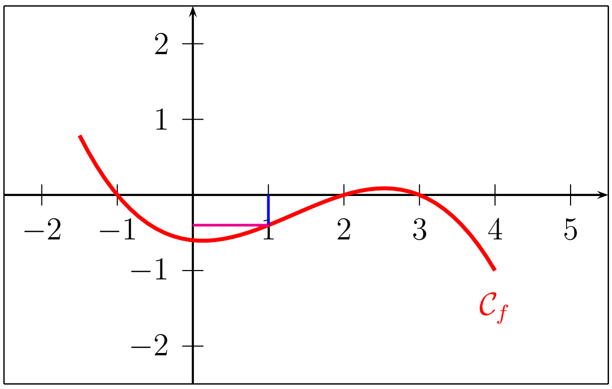
4 - 2) A partir d'une courbe représentative

Méthode 6 : pour lire l'image d'un nombre a

1. on trace un segment vertical qui part du point de coordonnées $(a\,;0)$ et qui se termine lorsque l'on coupe $\mathcal{C}_f$;
2. on lit la valeur de $f(a)$ sur l'axe des ordonnées.

Exemple :

A l'aide de la représentation graphique ci-contre :
* A la précision de lecture graphique près,1 a pour image -0,4.
* A la précision de lecture graphique près,3 a pour image 0.



Méthode 7 : pour lire les antécédents d'un nombre k

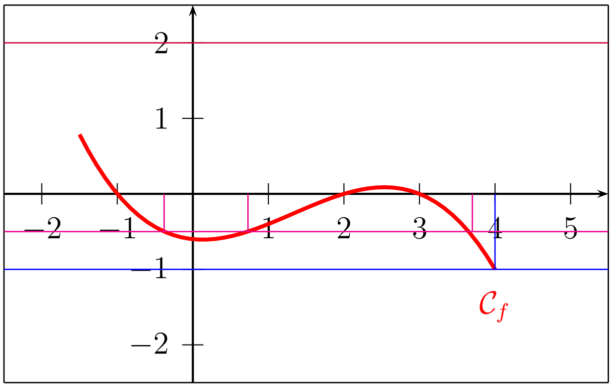
1. on peut tracer la droite d'équation $y = k$;
2. on repère les points d'intersection avec $\mathcal{C}_f$;
3. on lit les abscisses de ces points d'intersection.

Remarque : Cela revient à résoudre graphiquement $f(x) = k$.

Exemple :

A l'aide de la représentation graphique ci-contre :

* A la précision de lecture graphique près, -1 a pour antécédent 4.
* A la précision de lecture graphique près, $-0,5$ a pour antécédents : -0,38, 0,73 et 3,7
* 2 ne semble pas avoir d'antécédent par cette fonction sur $[-1,5\,;4]$



4 - 3) A partir d'une expression

La fonction présentée précédemment à pour expression : $f(x) = -0,1(x+1)(x-2)(x-3)$

Méthode 8 : on **calcule** l'image d'un nombre

0 a pour image -0,6 : $f(0) = -0,1(0+1)(0-2)(0-3) = -0,1 \times 1 \times (-2) \times (-3) = -0,6$

1 a pour image -0,4 : $f(1) = -0,1(1+1)(1-2)(1-3) = -0,1 \times 2 \times (-1) \times (-2) = -0,4$

2 a pour image 0 : $f(2) = -0,1(2+1)(2-2)(2-3) = -0,1 \times 3 \times 0 \times (-1) = 0$

Méthode 9 : on **résout une équation** pour chercher des antécédents d'un nombre

Recherche d'antécédents de 0 :
On résout : $f(x) = 0$
Cela donne : $-0,1(x+1)(x-2)(x-3) = 0$; cette équation produit a pour solutions -1, 2 et 3.

Recherche d'antécédents de 1
On résout : $f(x) = 1$

Cela donne : $-0,1(x+1)(x-2)(x-3) = 1$; on ne sait pas résoudre de manière exacte cette équation ... d'où l'intérêt d'avoir d'autres méthodes.

Chapitre 4

Sens de variations - Fonctions affines

Bulletin Officiel (B.O)

Contenu	Capacités Attendues	Commentaires
Étude qualitatives de fonctions Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	– Décrire, avec le vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. – Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations.	Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année.
Fonctions de référence Fonctions linéaires et affines	– Donner le sens de variation d'une fonction affine. – Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.	On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
décrire avec le vocabulaire ou un tableau le comportement d'une fonction donnée par une courbe						
dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations						
donner le sens de variation d'une fonction affine						
donner le signe de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.						

1) Sens de variations

1 - 1) Interpréter une courbe

Vocabulaire :

Géométrique	**Algébrique**
la courbe $\mathcal{C}_f$ **monte** quand on la parcourt de gauche à droite	la fonction f est **strictement croissante** sur l'intervalle correspondant
la courbe $\mathcal{C}_f$ **descend** quand on la parcourt de gauche à droite	la fonction f est **strictement décroissante** sur l'intervalle correspondant
la courbe $\mathcal{C}_f$ **est parallèle à l'axe des abscisses**	la fonction f est **constante** sur l'intervalle correspondant

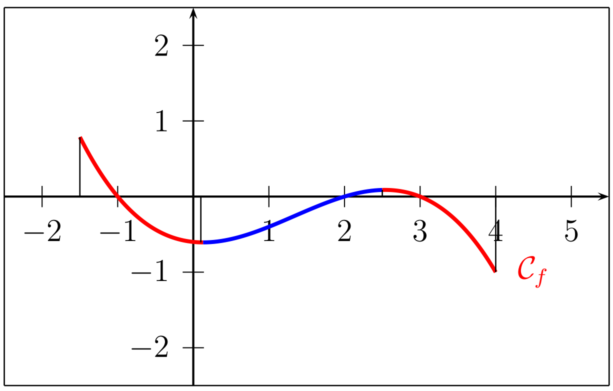
Une fonction est **monotone** sur un intervalle I lorsqu'elle ne change pas de sens de variation sur I.

Décrire le sens de variation

Pour décrire le sens de variation par une phrase, on donne son sens de variation sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_f$.

Remarques :
- C'est la fonction f qui est croissante/décroissante, pas la courbe $\mathcal{C}_f$, ni le nombre $f(x)$.
- Dire que f est (dé)croissante ne veut rien dire. Il faut toujours préciser **SUR** un intervalle.

Exemple :

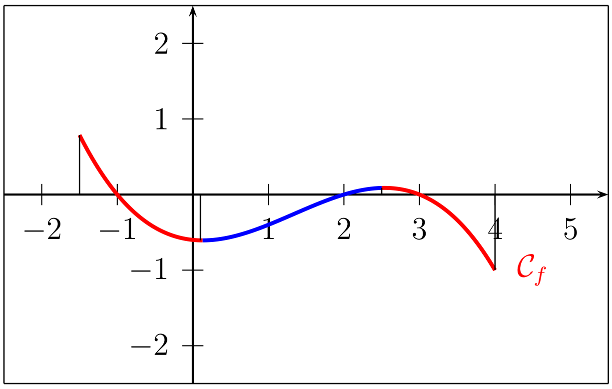


A l'aide de cette représentation graphique, on peut dire que :
- la fonction f est décroissante sur $[-1,5 \ ; \ 0,1]$ et sur $[2,5 \ ; \ 4]$
- la fonction f est croissante sur $[0,1 \ ; \ 2,5]$

1 - 2) Tableau de variations

On peut décrire le sens de variation d'une fonction dans un tableau :
- Une ligne « x » qui correspond à l'ensemble de définition.
- Une ligne « $f(x)$ » qui décrit par une flèche le sens de variation.
  - vers le haut : strictement croissant ;
  - horizontale : constante ;
  - vers le bas : strictement décroissante.

Exemple :



Représentation graphique de la fonction f

x	$-1,5$		0,1		2,5		4
$f(x)$	0,8	↘	-0,6	↗	0,1	↘	-1

Tableau de variations de la fonction f

2) Extremum d'une fonction

2 - 1) Définir et modéliser

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 : **majorant** $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$	**Définition 2** : **minorant** $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant m$
Définition 3 : **maximum** $M \in \mathbb{R}$ est un **maximum** de f sur I lorsque – M est un majorant – il existe $x \in I$ tel que $f(x) = M$	**Définition 4** : **minimum** $m \in \mathbb{R}$ est un **minimum** de f sur I lorsque – m est un minorant – il existe $x \in I$ tel que $f(x) = m$

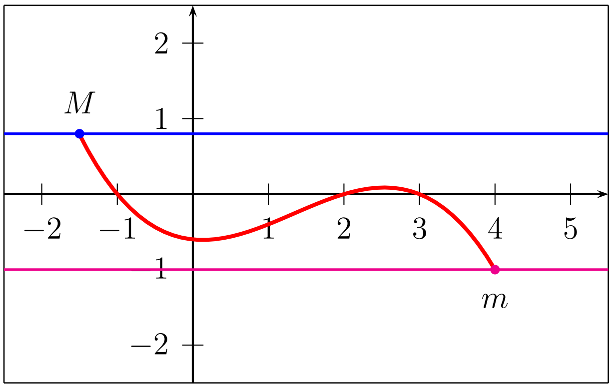
Exemple :

A l'aide de la représentation graphique ci-contre :

* 3 est un majorant de f ; 10 également.
* -1 est un minorant de f ; -25 également.

Par rapport aux extremum :

* le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$ est 0,8, atteint en -1,5 ; il est représenté par le point $M(-1,5;0,8)$
* le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ est -1, atteint en 4 ; il est représenté par le point $m(4;-1)$



2 - 2) Utiliser

Méthode 1 : On repère facilement les extremums dans un tableau de variation (pas de justification nécessaire).

Exemple :

A l'aide du tableau de variations ci-contre :

* 3 est un majorant de f ; 10 également.
* -1 est un minorant de f ; -25 également.

Par rapport aux extremum :

* le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$ est 0,8, atteint en -1,5
* le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ est -1, atteint en 4

x	$-1,5$		0,1		2,5		4
$f(x)$	0,8	↘	-0,6	↗	0,1	↘	-1

Tableau de variations de la fonction f

3) Fonctions affines

3 - 1) Définition

Définition 5 : fonction affine

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

Représentation graphique :

La représentation graphique de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ qui vérifient : $y = f(x)$.

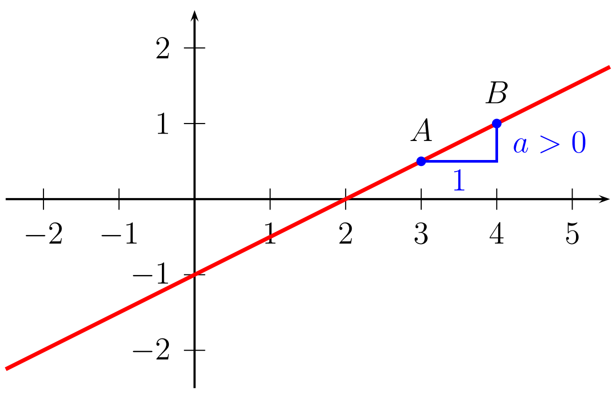
C'est la droite (d) d'équation $y = ax + b$

- Comme $f(0) = b$, le point de coordonnées $(0\ ;\ b)$ appartient à la droite (d) ; c'est pour cela qu'on nomme b **l'ordonnée à l'origine**.
- Si deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ sont sur la droite (d), alors on a la relation : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; la valeur de a donne la direction de la droite (d) ; c'est pour cela qu'on nomme a **coefficient directeur**.

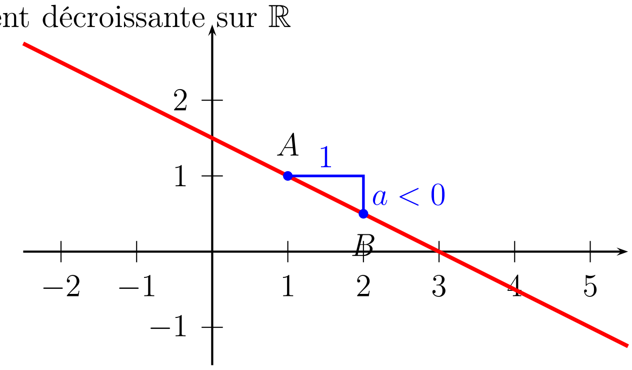
3 - 2) Sens de variation et signe d'une fonction affine

Propriété 1 : soit f la fonction affine $x \mapsto ax + b$ (avec a et b deux nombres réels)

Si a $>$0, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



Si a $<$0, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$



Signe d'une fonction affine

EXEMPLES :

<u>Fonction affine de coefficient directeur positif</u> :

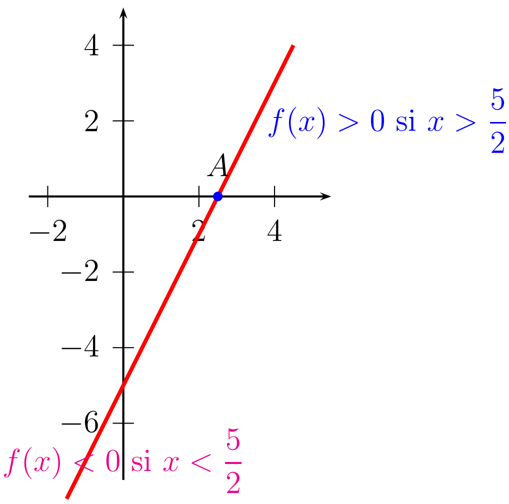
$f(x) = 2x - 5$

$a = 2 > 0$, la fonction f est strictement croissante.

Comme $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, on en déduit que :

* $f(x) < 0$ si $x < \frac{5}{2}$

* $f(x) > 0$ si $x > \frac{5}{2}$

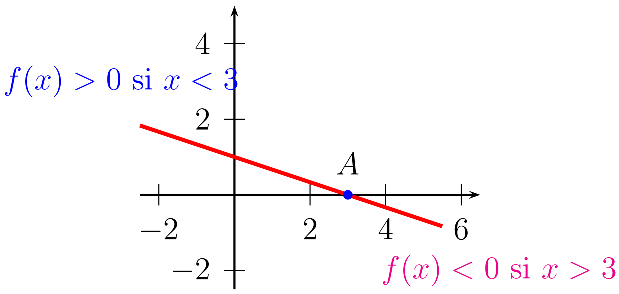


<u>Fonction affine de coefficient directeur négatif</u> :

$f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

$a = -\frac{1}{3} < 0$, la fonction f est strictement décroissante.

Comme $f(3) = 0$, on en déduit que :
* $f(x) > 0$ si $x < 3$
* $f(x) < 0$ si $x > 3$



Chapitre 5

Fonctions carré, inverse, de degré 2, homographique

Bulletin Officiel (B.O)

CONTENU	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions de référence Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	– Connaître les variations de la fonction carré et inverse. – Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.	Exemple de non linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	– Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.
Fonctions homographiques.	– Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
connaître les variations des fonctions carré et inverse, et représenter graphiquement ces fonctions						
connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 et la propriété de symétrie de leurs courbes						
identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique						
transformer des expressions rationnelles simples						

1) La fonction carré : $x \mapsto x^2$

1 - 1) Sens de variation

Définition 1 : la fonction « carrée » est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$

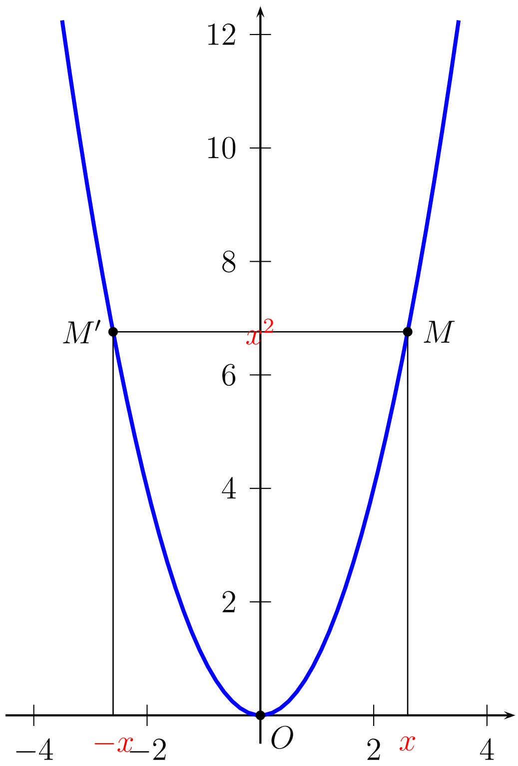
Propriété 1 : la fonction carrée est :
- strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$;
- strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

tableau de variations de la fonction carrée

1 - 2) Représentation graphique

Propriété 2 : Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction carrée est la **parabole** d'équation $y = x^2$ qui admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

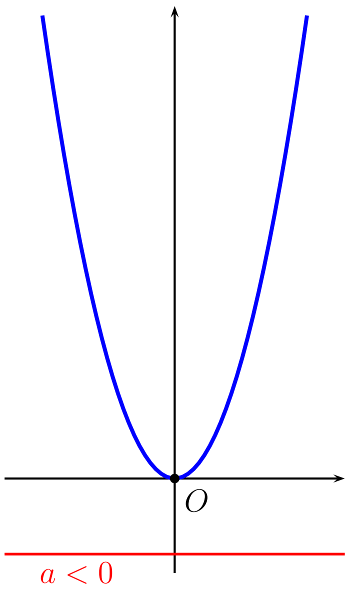


Preuve : quel que soit le nombre réel x, $(-x)^2 = x^2$
Ainsi, les points $M(x\ ;\ x^2)$ et $M'(-x\ ;\ x^2)$ appartiennent tous les deux à la courbe représentative de la fonction carrée. Ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Comme le raisonnement est valable pour toute valeur de x, cela montre que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la parabole.

Remarque : Le point $O(0\ ;\ 0)$ est appelé le **sommet** de la parabole.

1 - 3) Équations $x^2 = a$

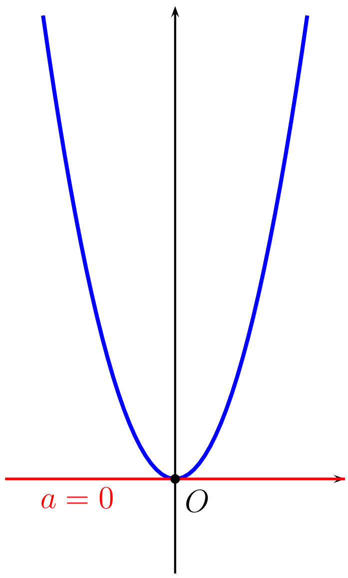
$x^2 = a$ avec $a < 0$ n'a pas de solution



Preuve :

Pour tout nombre x, $x^2 \geqslant 0$ et donc x^2 ne peut jamais être égal à un nombre strictement négatif.

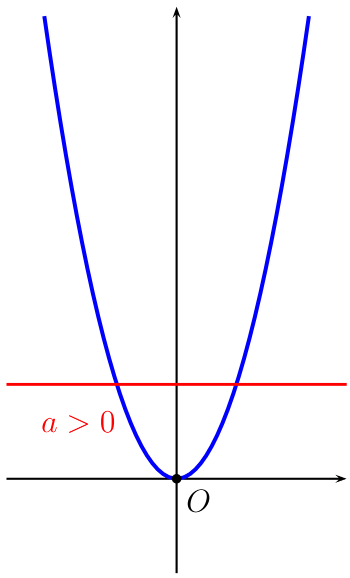
$x^2 = a$ avec $a = 0$ a une unique solution : 0



Preuve :

$x^2 = 0$ peut s'interpréter comme une équation produit $x \times x = 0$ ce qui signifie $x = 0$ ou $x = 0$ c'est-à-dire $x = 0$

$x^2 = a$ avec $a > 0$ a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$



Preuve :

$x^2 = a$ revient à $x^2 - a = 0$ ce qui peut se factoriser en
$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$
Cette équation produit à pour solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

2) Fonction inverse

2 - 1) Étude de la fonction

Définition 2 : la fonction « inverse » est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

EXEMPLES :

$f(3) = \dfrac{1}{3}$ $\qquad f(-5) = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$ $\qquad f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \dfrac{2}{1} = 2$

$f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{5}{2}} = 1 \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{5}$ $\qquad f(10^{-3}) = \dfrac{1}{10^{-3}} = 10^3$ $\qquad f(10^8) = \dfrac{1}{10^8} = 10^{-8}$

REMARQUE :

0 n'a pas d'image : on dit que 0 est une **valeur interdite** pour la fonction inverse.

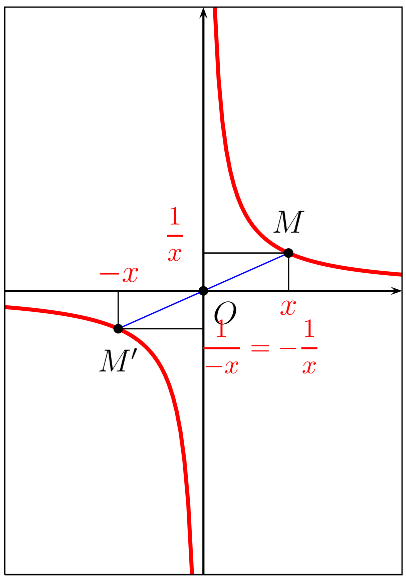
Propriété 3 : la fonction inverse est :
– strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$
– strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

tableau de variations de la fonction inverse

2 - 2) Représentation graphique

Propriété 4 : Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction inverse est l'**hyperbole** d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ qui admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



PREUVE : quel que soit le nombre réel x, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$

Ainsi, les points $M\left(x\ ;\ \dfrac{1}{x}\right)$ et $M'\left(-x\ ;\ -\dfrac{1}{x}\right)$ appartiennent tous les deux à la courbe représentative de la fonction inverse. Ils sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
Comme le raisonnement est valable pour toute valeur de x, cela montre que l'origine du repère est centre de symétrie de l'hyperbole.

3) Fonctions polynôme du second degré

Définition 3 : une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

a, b et c sont trois nombres réels (avec $a \neq 0$)

EXEMPLES :

$p : t \mapsto 3t^2 + 2t$ est un polynôme du second degré ($a = 3$, $b = 2$ et $c = 0$)

$f : x \mapsto (x-1)^2+3x$ est un polynôme du second degré car $f(x) = x^2-2x+1+3x = x^2+x+1$ ($a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$)

Propriété 5 : Pour une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$:

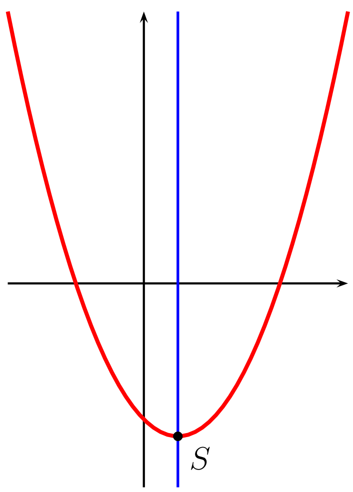
– si $a > 0$: elle est strictement décroissante puis strictement croissante ;

– si $a < 0$: elle est strictement croissante puis strictement décroissante.

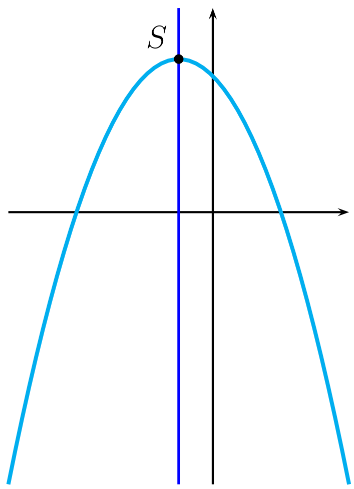
Propriété 6 : Une fonction polynôme du second degré f a pour représentation graphique une courbe appelée **parabole**. Dans un repère orthogonal, cette courbe admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

La fonction f atteint son extremum en une valeur x_S ; le point S de coordonnées $(x_S \; ; \; f(x_S))$ est situé sur l'axe de symétrie de la parabole ; on l'appelle le **sommet** de la parabole.

$a > 0$



$a < 0$



REMARQUE : ces propriétés sont admises

POUR ALLER PLUS LOIN : $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire d'une autre manière (appelée forme « canonique »)
$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$; on peut passer d'une forme à l'autre par des propriétés algébriques (développement, factorisation).
Cette forme canonique permet de lire directement les coordonnées du sommet de la parabole : $S(\alpha \; ; \; \beta)$

4) Fonctions homographiques

Définition 4 : une fonction homographique est une fonction f par

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

a, b, c et d sont quatre nombres réels (avec $c \neq 0$ et tels que $ad - bc \neq 0$)

Elle est définie pour toutes les valeurs de x telles que le dénominateur $cx+d$ ne s'annule pas.

Exemples :

$h_1(x) = \dfrac{3x+2}{5x-3}$ est une fonction homographique

$h_2(x) = \dfrac{7x-2}{-5x+12}$ est une fonction homographique

$h_3(x) = \dfrac{3x+2}{x}$ est une fonction homographique

Exemple détaillé :

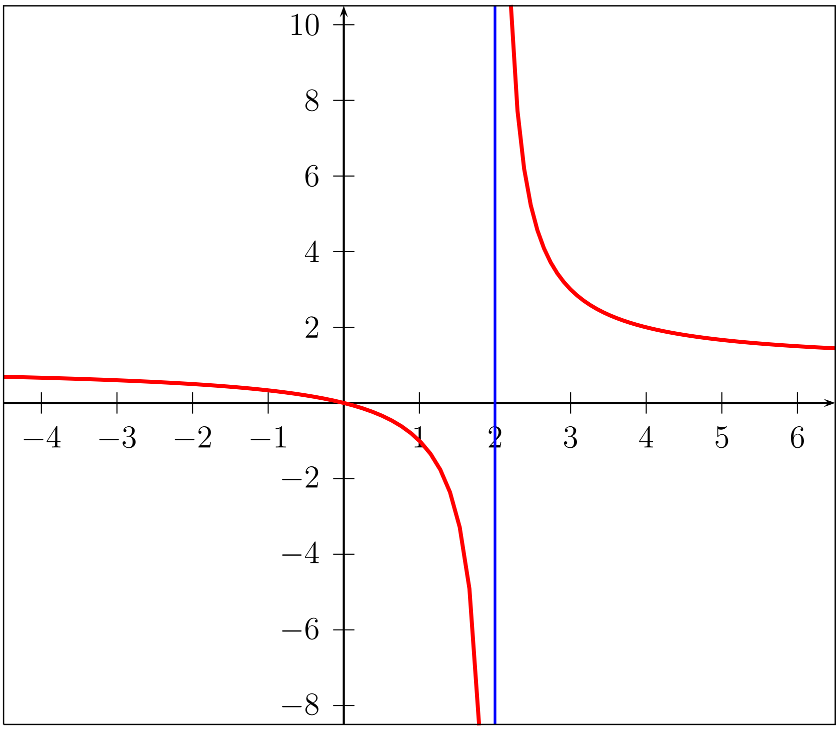
$h(x) = \dfrac{x}{x-2}$: c'est une fonction homographique ($a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = -2$)

Elle est définie partout où le dénominateur ne s'annule pas ; on va chercher la ou les valeurs d'annulation du dénominateur (les valeurs « interdites ») : $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Ainsi, la seule **valeur interdite** étant 2, $\mathcal{D}_h =]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$

Cela se note aussi : $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Cela signifie que le nombre -2 n'a pas d'image ; sur la figure ci-dessous, la courbe représentative de la fonction h ne coupe pas la droite d'équation $x = -2$ (en bleu)



Chapitre 6

Inéquations, étude de signes, sens de variations

Bulletin Officiel (B.O)

Contenu	Capacités Attendues	Commentaires
Fonctions **Étude qualitative de fonctions** Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle	Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations : – comparer les images de deux nombres dans un intervalle ; – déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.	Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive , de celles obtenues sur un écran graphique. Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique d'une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracer de courbe.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	– Modéliser un problème par une inéquation. – Résoudre une inéquation à partir de l'étude de signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. – Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : – combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, – mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
modéliser un problème par une inéquation						
résoudre une inéquation à partir de l'étude de signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré						
maîtriser les définitions formelles d'une fonction croissante et décroissante et utiliser ces définitions (conservation ou inversion de l'ordre)						

1) Inéquation

1 - 1) Méthode

On complète ici le travail fait au chapitre 2 :
– résolution graphique d'inéquations ;
– résolution d'inéquations du premier degré.

Méthode 1 : pour résoudre une inéquation du type $f(x) \leqslant g(x)$, on résout l'inéquation équivalente suivante : $f(x) - g(x) \leqslant 0$.

Cela revient à étudier le signe de l'expression $f(x) - g(x)$.

1 - 2) Étude du signe d'une expression factorisée

Propriété 1 : Pour connaître le signe d'une expression **factorisée**, on étudie le signe de chaque facteur et on utilise la « règle des signes » :
* $+$ par $+$ donne $+$
* $-$ par $+$ donne $-$
* $-$ par $-$ donne $+$

Méthode 2 : pour connaître le signe d'une expression :

1. on la met sous forme **factorisée** ;
2. on étudie le signe de chaque facteur ;
3. on utilise la « règle des signes ».

Il est commode de présenter ce travail sous la forme d'un **tableau de signes**.

Exemple détaillé :

On cherche à résoudre l'inéquation $(x+2)(7+3x) > 4x^2 + 8x$

1. On met en place une étude de signe équivalente :

   $(x+2)(7+3x) > 4x^2 + 8x \Leftrightarrow (x+2)(7+3x) - (4x^2 + 8x) > 0$

2. On cherche à factoriser l'expression :

$$\begin{aligned}(x+2)(7+3x) - (4x^2+8x) &= (x+2)(7+3x) - 4x(x+2)\\ &= (x+2)[7+3x-4x]\\ &= (x+2)(7-x)\end{aligned}$$

3. On utilise la règle des signes, présenté dans un tableau de signes par commodité :

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
signe$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe$(7-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe$(x+2)(7-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : l'inéquation $(x+2)(7+3x) > 4x^2 + 8x$ a pour solution : $\boxed{\mathcal{S} =]-2\,;\,7[}$

1 - 3) Étude du signe d'un quotient

Le principe est le même qu'au paragraphe précédent (parce que la « règle des signes » s'applique aussi bien pour un quotient que pour un produit). Il faut cependant faire attention aux éventuelles valeurs interdites.

EXEMPLE DÉTAILLÉ :

On cherche à résoudre l'inéquation $\dfrac{3x+2}{5-x} \leqslant 0$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		5		$+\infty$
signe$(3x+2)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
signe$(5-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe$\dfrac{3x+2}{5-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Conclusion : l'inéquation $\dfrac{3x+2}{5-x} \leqslant 0$ a pour solution : $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right] \cup \left]5\,;\,+\infty\right[}$

2) Sens de variation d'une fonction

Définition 1 : sens de variation d'une fonction

f est **strictement croissante** sur I lorsque :

pour tous réels a et b dans I, **si** $a < b$ **alors** $f(a) < f(b)$

f est **strictement décroissante** sur I lorsque :

pour tous réels a et b dans I, **si** $a < b$ **alors** $f(a) > f(b)$

f est **constante** sur I lorsque :

pour tous réels a et b dans I, $f(a) = f(b)$

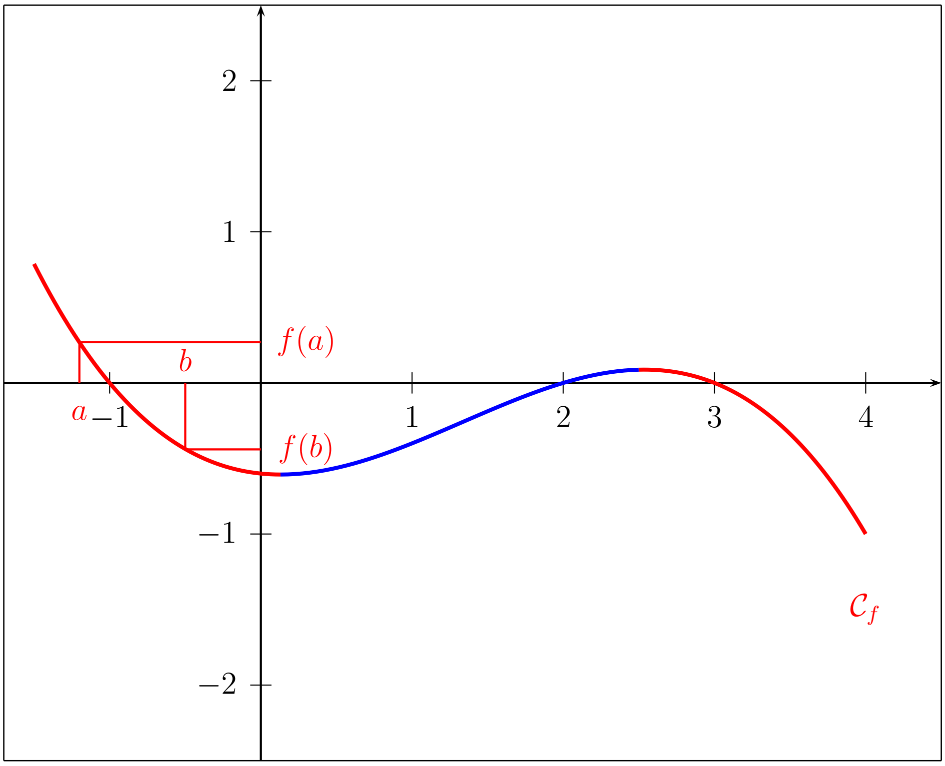
Méthode 3 : ordonner des nombres

Avec I un intervalle, f une fonction définie sur I, a et b deux réels de I :
- Si f est strictement croissante sur I et $a < b$, alors $f(a) < f(b)$
- Si f est strictement décroissante sur I et $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

AUTRE FORMULATION :

- avec une fonction strictement croissante, on dit que l'ordre est « conservé » ;
- avec une fonction strictement décroissante, on dit que l'ordre est « inversé ».

Exemple :



Représentation graphique de la fonction f

- Pour tous nombres a et b tels que :
  $-1,5 < a < b < 0,1$, alors : $f(a) > f(b)$ (l'ordre est inversé)
- Pour tous nombres c et d tels que :
  $0,1 < c < d < 2,5$, alors : $f(c) < f(d)$ (l'ordre est conservé)

Chapitre 7

Trigonométrie

Bulletin Officiel (B.O)

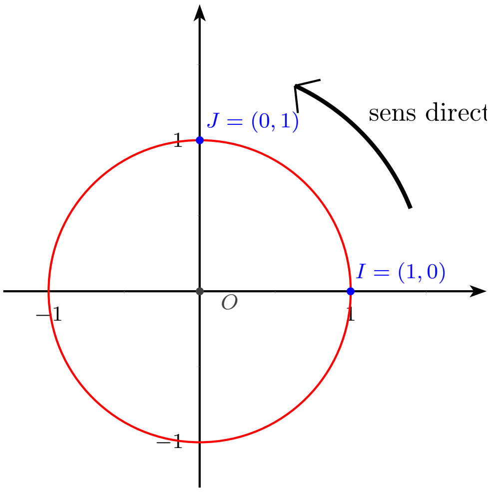
Contenu	Capacités Attendues	Commentaires
Trigonométrie « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	– On fait le lien entre les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.	On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège. La notion de radian n'est pas exigible.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
« Enrouler » la droite numérique sur le cercle trigonométrique – associer à un réel son point image sur le cercle trigonométrique ; – associer à un point M du cercle trigonométrique un réel ou une famille de réels.						
Définir le sinus et le cosinus d'un nombre réel ; faire le lien : – avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° ; – avec la trigonométrie du triangle rectangle.						

1) Enroulement de la droite numérique

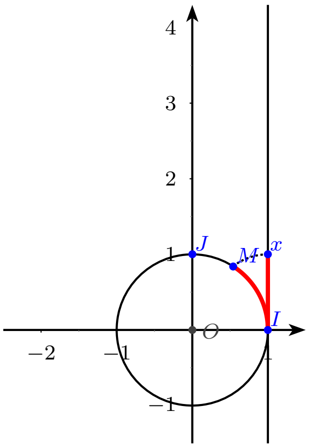
1 - 1) Le cercle trigonométrique



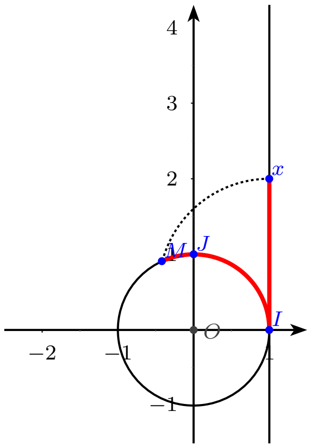
On se place dans un repère orthonormé (O, I, J)

Définition 1 : Le cercle **trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi un sens de parcours appelé sens direct (qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre).

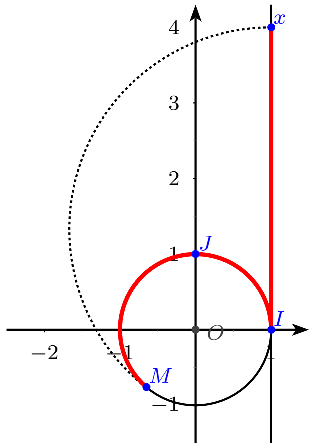
1 - 2) Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique



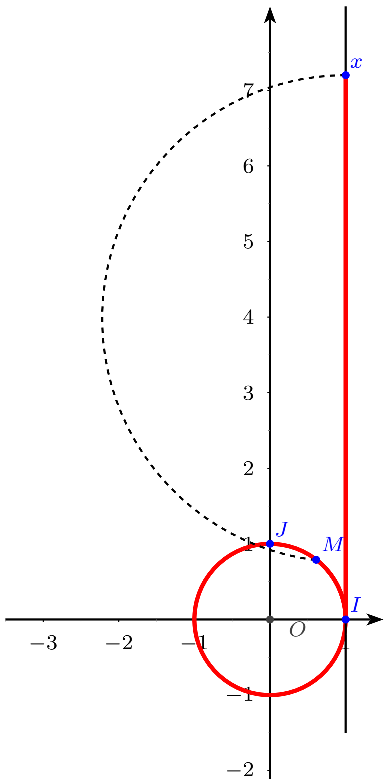
étape n°1 : début de l'enroulement



étape n°2



étape n°3



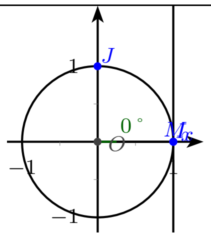
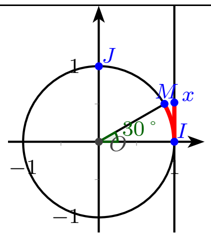
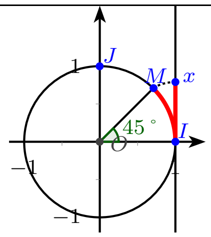
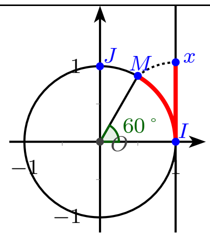
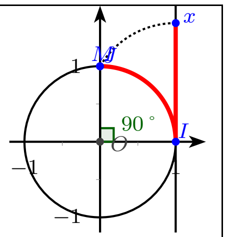
étape n°4 : un tour complet a été effectué pour revenir à la position qu'occupait le point M à l'étape n°1

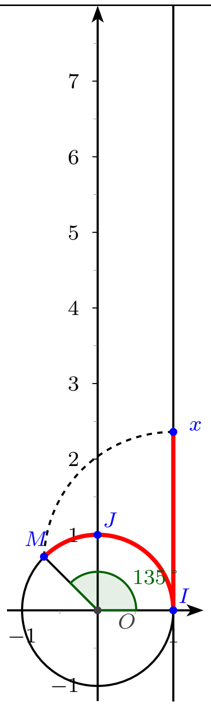
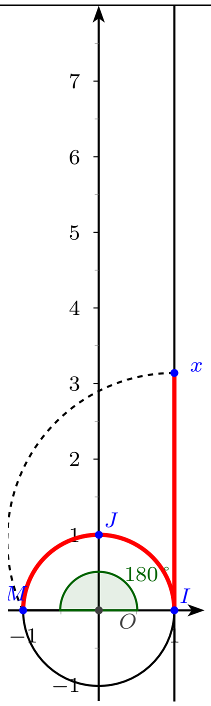
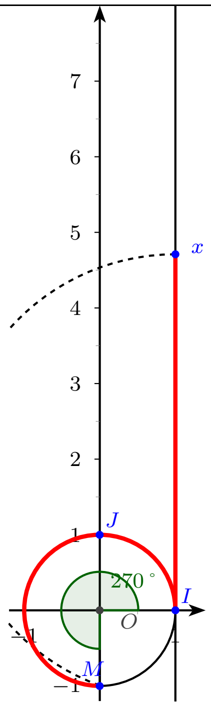
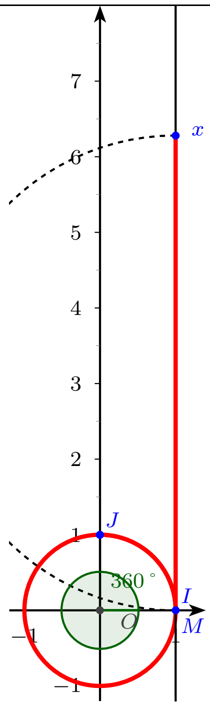
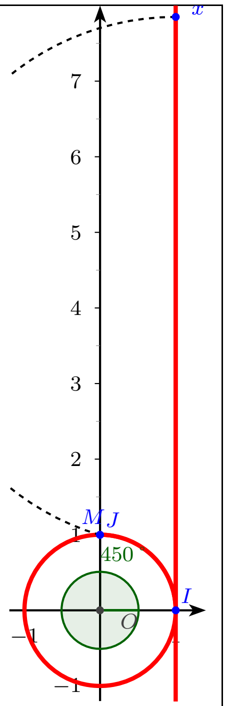
Soit d une droite graduée dont le zéro coïncide avec le point I du cercle.

On enroule sur le cercle la demi-droite rouge des réels positifs dans le sens direct : on obtient alors un point M du cercle.

On remarque (étapes 1 et 4 dans ces exemples) que deux réels différents peuvent coïncider avec un même point M ; on aura alors effectuer un nombre entier de tours, c'est-à-dire que la différence entre les deux réels en question est un multiple de 2π.

On représente ci-dessous certaines valeurs « remarquables » du réel x et l'angle $\widehat{IOM}$ qui lui correspond.

					
valeur de x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
angle $\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°

					
valeur de x	$\dfrac{3\pi}{4}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π	$\dfrac{5\pi}{2}$
angle $\widehat{IOM}$	135°	180°	270°	360°	450°

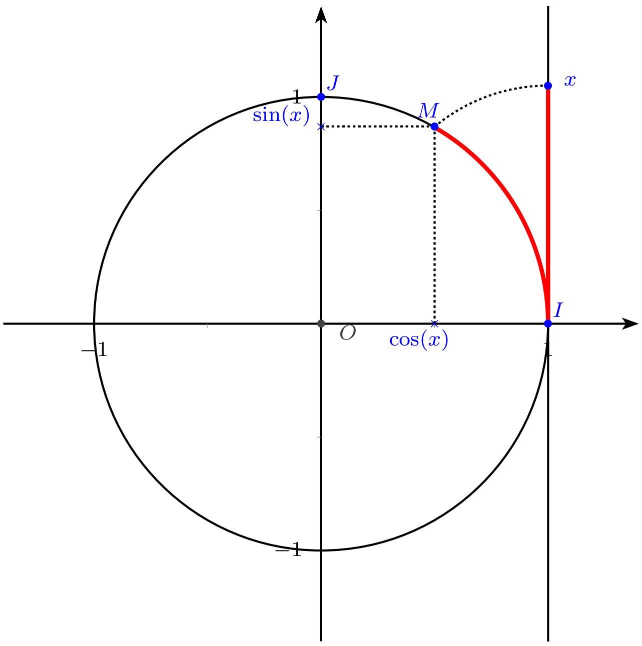
Remarque : tant que $\widehat{IOM} \leqslant 360°$, la valeur de x est exactement égale à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$

Lorsque $\widehat{IOM} > 360°$, il faudra comptabiliser un certain nombre de fois la circonférence du cercle (correspondant au nombre de tours qui auraient été effectués) en plus de la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.

La circonférence du cercle trigonométrique est égale à 2π.

2) Sinus et cosinus d'un nombre réel

2 - 1) Définition et propriétés



Définition 2 : cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit x un nombre réel et M son image sur le cercle trigonométrique.

- l'abscisse du point M est appelé **cosinus** du nombre réel x ;
- l'ordonnée du point M est appelé **sinus** du nombre réel x.

Propriété 1 :

- pour tour réel x,
  $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- pour tour réel x,
  $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

Justifications :

Les inégalités sur $\cos(x)$ et $\sin(x)$ viennent du fait que le point M est sur le cercle trigonométrique, et donc que ses abscisses et ordonnées sont comprises entre -1 et 1.

La seconde relation se démontre en utilisant le théorème de Pythagore.

2 - 2) Sinus, cosinus et tangente d'un angle aigu

Lien avec le cosinus, le sinus d'un angle aigu

Sur la figure ci-contre, en utilisant les formules de trigonométrie vues au collège :

$$\cos(\widehat{IOM}) = \frac{OH}{OM}$$

$$\sin(\widehat{IOM}) = \frac{HM}{OM}$$

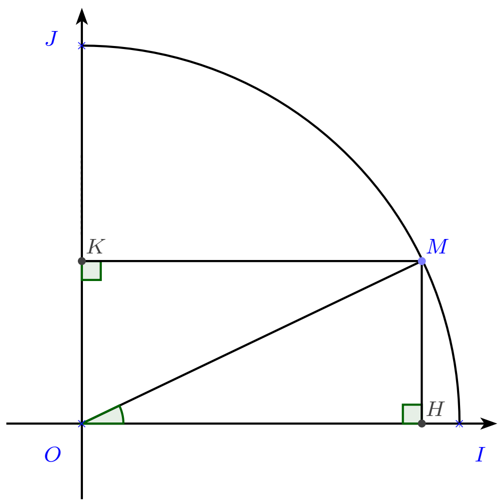
$$\tan(\widehat{IOM}) = \frac{HM}{OH}$$

En se rappelant que le cercle trigonométrique a un rayon égal à 1, on obtient (pour $x \in [0\ ;\ 90[$) :

$$\cos(x) = \cos(\widehat{IOM}) = OH$$

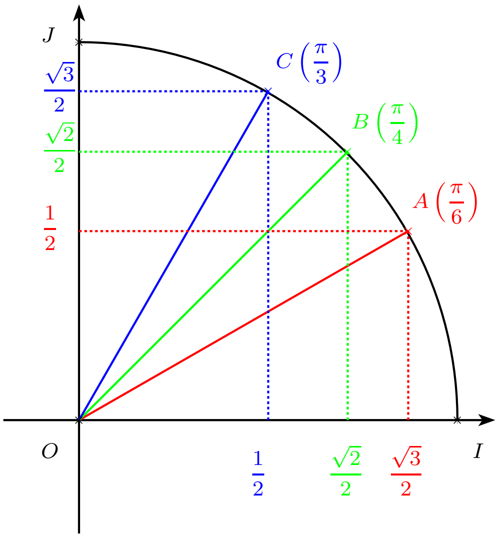
$$\sin(x) = \sin(\widehat{IOM}) = HM = OK$$

$$\tan(x) = \tan(\widehat{IOM}) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



Valeurs remarquables :

angle	0°	30°	45°	60°	90°
valeur de x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Chapitre 8

Analyse de données - Statistiques descriptives

Bulletin Officiel (B.O)

Contenu	Capacités Attendues	Commentaires
Statistiques descriptives, analyse de données Caractéristiques de position et de dispersion – médiane, quartile ; – moyenne.	– Utiliser un logiciel (par exemple, un tableur) ou une calculatrice pour étudier une série statistique. – Passer des effectifs aux fréquences, calculer les caractéristiques d'une série définie par effectifs ou fréquences. – Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées. – Représenter une série statistique graphiquement (nuage de points, histogramme, courbe des fréquences cumulées).	L'objectif est de faire réfléchir les élèves riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE), synthétiser l'information et proposer des représentations pertinentes.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
utiliser un logiciel ou une calculatrice pour étudier une série statistique						
passer des effectifs aux fréquences						
calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées						
calculer des caractéristiques d'une série						
représenter une série statistique graphiquement						

Une série statistique est une liste indiquant, pour chaque individu d'une population, la valeur d'une propriété que l'on étudie, que l'on appelle le **caractère**.

La statistique descriptive vise à donner des **informations globales** sur la population.

Il n'y a **pas d'aléatoire** dans cette analyse : elle **décrit** une population **connue**, contrairement aux probabilités.

1) Effectifs et fréquences

Définition 1 : Dans une série statistique :
- l'**effectif** d'une valeur est le nombre de données correspondant à cette valeur ;
- la **fréquence** d'une valeur est $f = \dfrac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$

Remarques :
- Bien comprendre pourquoi on a toujours $0 \leqslant f \leqslant 1$, et que la somme des fréquences est égale 1 ;
- On donne souvent aux fréquences le format d'un pourcentage.

Enemple : On lance 50 fois un dé à six faces (faces numérotées de 1 à 6) et on compte le nombre de 1 sortis, de 2 sortis ... de 6 sortis.

On note le résultat dans le tableau ci-dessous, puis on calcule les **fréquences d'apparition** de chaque numéro :

numéro sorti	1	2	3	4	5	6
effectif	12	7	12	3	6	10
fréquence (en décimal)	0,24	0,14	0,24	0,06	0,12	0,2
fréquence (en pourcentage)	24 %	14 %	24 %	6 %	12 %	20 %

On peut contrôler que la somme des fréquences est bien égale à 1.

On peut chercher à déterminer le nombre de valeurs inférieures à une valeur donnée (ou la fréquence d'apparitions de valeurs inférieures à une valeur donnée). On parle alors d'**effectif cumulé** (ou de **fréquence cumulée**).

Ces valeurs cumulées s'obtiennent en ajoutant les effectifs (les fréquences) :

numéro sorti	1	2	3	4	5	6
effectif	12	7	12	3	6	10
effectif cumulé	**12**	**19**	**31**	**34**	**40**	**50**
fréquence (en décimal)	0,24	0,14	0,24	0,6	0,12	0,2
fréquence cumulée	**0,24**	**0,38**	**0,62**	**0,68**	**0,8**	**1**

31 dans le tableau signifie que 31 lancers du dés ont donné un numéro inférieur ou égal à 3.

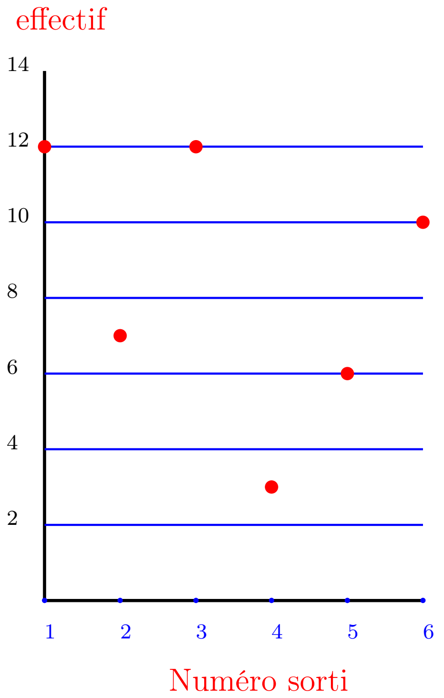
0,8 dans le tableau signifie que les numéros inférieurs ou égaux à 5 sont sortis à une fréquence de 0,8 (ce qui s'écrit aussi 80 %).

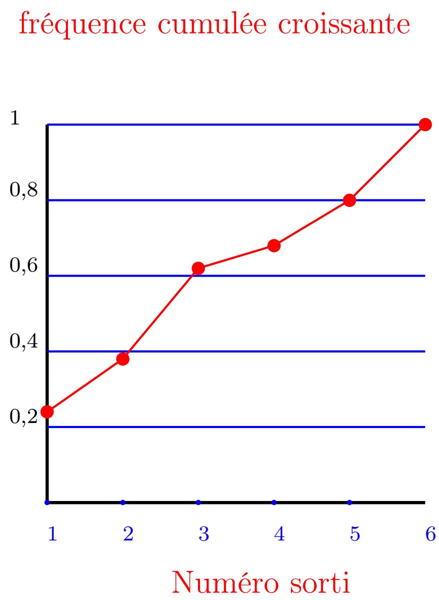
2) Graphiques

Le choin du graphique dépend du type de série et de ce que l'on veut montrer.

- un diagramme en bâtons pour des valeurs discrètes ou qualitatives ;
- un histogramme pour des valeurs numériques regroupées en classes ;
  Diagramme en bâtons et histogramme peuvent représenter les effectifs ou les fréquences pour chaque valeur ou classe.
- un diagramme circulaire montre la part relative de chaque valeur ou classe.

On présente ci-dessous deux autres graphiques : un « nuage de points » et une courbe de fréquences cumulées :





3) Indicateurs de position

3 - 1) Moyenne

Définition 2 :

Valeur	x_1	x_2	$\ldots$	x_p
Effectif	n_1	n_2	$\ldots$	n_p
Fréquence	f_1	f_2	$\ldots$	f_p

La moyenne $\bar{x}$ de cette série est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \ldots f_p \times x_p$$

REMARQUE : la moyenne est la valeur qui, substituée à chaque valeur de la série, donnerait la même somme.

3 - 2) Médiane et quartiles

Définition 3 : la médiane Me d'une série numérique **ordonnée** est la valeur qui partage la série **en deux sous-séries de même effectif**.

REMARQUE : en pratique :
- si l'effectif de la série est impair, la médiane est la valeur du « milieu » ;
- si l'effectif de la série est pair, on peut faire la demi-somme des deux valeurs situées au « milieu ».

Définition 4 : premier et troisième quartiles

Le **premier quartile** Q_1 d'une série numérique ordonnée est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% (c'est-à-dire le quart) des valeurs lui sont inférieures ou égales.

Le **troisième quartile** Q_3 d'une série numérique ordonnée est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% (c'est-à-dire les trois quarts) des valeurs lui sont inférieures ou égales.

REMARQUE : selon les définitions (française, anglo-saxonne, etc.), les outils (calculatrice, tableur) peuvent donner des valeurs différentes selon qu'ils prennent des valeurs de la série ou non.

L'idée générale reste la même : diviser la population en deux moitiés d'effectifs égaux pour la médiane, puis en quatre quarts d'effectifs égaux (ou pratiquement égaux) pour les quartiles.

Les différences entre les pays sont très minimes sur des grandes populations : on conservera les résultats donnés par les outils à disposition.

4) Indicateurs de dispersion

Définition 5 :

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile.

REMARQUE : ces deux valeurs témoignent de **l'homogénéité** ou de **l'hétérogénéité** des valeurs de la série statistique.

5) La démarche statistique

Il s'agit d'un **protcole** à mettre en place quand on veut répondre à une problématique.

On met en place un **sondage** pour avoir des précisions sur un caractère de la population.

1. formulation de la question ;
2. présentation de la question à tout ou partie de la population concernée ;
3. recueil et présentation des données « brutes » ;
4. examen des valeurs **aberrantes**, des valeurs **extrêmes** avec d'éventuelles corrections ;
5. **résumé statistique** des données brutes ;
6. présentation de manière adaptée des résultats (tableau, graphique).

REMARQUE : différents problèmes peuvent se poser à chaque étape : par exemple, on veut connaître l'âge du parc automobile en France :

- à qui poser la question ? Si on la pose à des garagistes, on n'aura sans doute pas les voitures récentes. Si on pose la question au hasard dans la rue, cet échantillon de population sera-t-il représentatif de la population entière ?
- que penser d'une voiture qui aurait 45 ans ? Est-ce une valeur possible, a-t-on commis une erreur en notant la réponse ? La personne qui a répondu a-t-il donné une réponse au hasard ? Peut-on « remonter à la source » et vérifier cette information ? Sinon, faut-il conserver ou éliminer cette valeur ?
- l'âge moyen est-il un élément pertinent (d'autant que la voiture de 45 ans, conservée ou pas, aura une influence importante sur la valeur moyenne si le nombre de voitures en jeu est peu important). Quels éléments statistiques sont les plus pertinents ?

Chapitre 9

Probabilités

Bulletin Officiel (B.O)

CONTENU	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Probabilités sur un ensemble fini Probabilité d'un évènement.	– Déterminer la probabilité d'évènements dans des situations d'équiprobabilité. – Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.	La probabilité d'un évènement est définie comme la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.
Réunion et intersection de deux évènements, formule $p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$	– Connaître cette formule.	Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées						
déterminer la probabilité d'évènements dans des situations d'équiprobabilité						
calculer une probabilité à l'aide d'arbres, de diagrammes ou de tableaux.						
connaître et utiliser la formule $p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$						

1) Modélisation d'une expérience aléatoire

1 - 1) Définition

Définition 1 : Une expérience est aléatoire lorsque :
- elle a **plusieurs issues** ;
- on ne peut **pas prévoir de façon certaine** le résultat ;
- on peut **la répéter dans des conditions similaires**.

Exemples :

- Un lancer de dé peut être considéré comme une expérience aléatoire.
- La météo n'est pas une expérience aléatoire, puisqu'on ne peut pas répéter la situation d'un moment donné ultérieurement.

Vocabulaire :

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles. On le note souvent E ou Ω.

Par exemple, pour un lancer d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6, $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Dans la suite du cours, on notera E l'univers ; il comportera N issues.

1 - 2) Simuler une expérience aléatoire

Pour réaliser un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, il est intéressant de la faire **simuler** par une machine.

Les outils numériques disposent tous d'un générateur de nombres aléatoires qui permet de simuler le hasard d'une expérience aléatoire.

Générateurs de nombres aléatoires :

	nombre aléatoire dans [0 ; 1[	nombre aléatoire entre a et b (inclus)
Tableur	=ALEA()	=ALEA.ENTRE.BORNE(a ;b)
TI (Math→PRB)	Rand()	RandInt(a,b)
Casio (OPTN→PROB)	Ran#	RandInt#(a,b)

Remarque :

Si les fonction Randint() et Ranint#() n'existent pas sur les calculatrices, on peut se contenter des fonctions Rand et Ran# et utiliser la fonction partie entière.

Pour simuler un dé six faces :
- TI : int(6 × Rand())+1 fait la même chose que RandInt(1,6)
- Casio : Int(6 × Ran#)+1 fait la même chose que RandInt#(1,6)

1 - 3) Modéliser un expérience aléatoire

Propriété 1 : On observe que lorsque l'on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, les fréquences observées de chaque issue tendent vers des nombres fixes.

On nomme ce phénomène **la loi des grands nombres**.

Définition 2 : loi de probabilité

Une loi de probabilité sur l'univers E, c'est l'association, à chaque issue de E, d'un nombre positif ou nul p_i tel que $p_1 + p_2 + \ldots + p_N = 1$.

On appelle p_i la probabilité de l'issue a_i.

Remarque importante :

Modéliser une expérience, c'est choisir la bonne loi de probabilité : celle vers laquelle tendent les fréquences observées lorsque l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience.

Pour bien choisir la loi, on peut :
- Assimiler les fréquences observées aux probabilités.
- Prendre en compte l'aspect physique ou géométrique de l'expérience : dés équilibrés, boules indiscernables au toucher, etc.

Notation :

Pour des raisons de commodité, on présente souvent la loi de probabilité d'une expérience aléatoire sous la forme d'un tableau.

Propriété 2 : Lorsqu'une expérience est **équiprobable**, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{N}$, où N est le nombre d'issues de l'univers.

Si l'expérience est équiprobable, on dit que sa loi est **équirépartie** (ou **uniforme**).

Exemple :

Si on lance un dé à six faces bien équilibré, numéroté de 1 à 6 et qu'on s'intéresse au numéro sorti, la loi de probabilité associée est :

issue a_i	1	2	3	4	5	6
probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) Probabilité d'un évènement

2 - 1) Notion d'évènement

Définition 3 : Un **événement** est une partie de l'univers : c'est un ensemble d'issues de l'expérience.

REMARQUE :

On donne souvent un nom à un évènement pour faciliter la rédaction.

Dans l'exemple du lancer de dé à 6 faces, on peut noter :
- A l'évènement : « obtenir un nombre strictement inférieur à 3 » ;
- B l'évènement : « obtenir un nombre pair ».

VOCABULAIRE :

- un évènement A est dit certain si $p(A) = 1$; en particulier, $p(E) = 1$
- un évènement A est dit impossible si $p(A) = 0$
- l'évènement **contraire** de A (celui dont les issues ne réalisent pas A) est noté $\overline{A}$

2 - 2) Probabilité d'un évènement

Propriété 3 : pour un événement A défini sur une expérience **équiprobable**, on a :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{nombre d'issues dans } E}$$

EXEMPLE : en reprenant l'exemple précédent :
- l'évènement A « obtenir un nombre strictement inférieur à 3 » est constitué des issues $\{1\}$ et $\{2\}$; on a donc $p(A) = \frac{2}{6}$
- l'évènement B « obtenir un nombre pair » est constitué des issues $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$; on a donc $p(B) = \frac{3}{6}$

REMARQUE : le calcul des probabilités en situation d'équiprobabilité consiste donc en un **dénombrement** : pour calculer $p(A)$, il s'agit de compter les issues possibles, puis celles réalisant A.

3) Opération sur les évènements

3 - 1) Union et Intersection d'évènements

Définition 4 : Union d'évènements

$A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **OU** B (au moins l'un des deux, ou les deux en même temps)

Intersection d'évènements

$A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **ET** B (les deux à la fois)

Exemple : en reprenant l'exemple précédent :
- l'évènement $A \cup B$ est l'évènement « obtenir un nombre strictement inférieur à 3 » **OU** « obtenir un nombre pair » : il est constitué des issues $\{1\}$ et $\{2\}$
- l'évènement $A \cap B$ est l'évènement « obtenir un nombre strictement inférieur à 3 » **ET** « obtenir un nombre pair » : il est constitué uniquement de l'issue $\{2\}$

Propriété 4 : Pour tous évènements A et B sur un univers E,

$$p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Justification : en faisant $p(A) + p(B)$, on compte deux fois les issues de $A \cap B$. Il faut donc les retrancher de la somme.

Remarque : en appliquant le résultat précédent aux évènements A et $\overline{A}$, on obtient :

$p(A \cap \overline{A}) + p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$

Or,
- $A \cap \overline{A}$ est un évènement impossible, donc $p(A \cap \overline{A}) = 0$
- $A \cup \overline{A}$ est un évènement certain, donc $p(A \cap \overline{A}) = 1$

Ainsi, $p(A) + p(\overline{A}) = 1$

Chapitre 10

Fluctuation d'échantillonnage

Bulletin Officiel (B.O)

CONTENU	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Échantillonnage Notion d'échantillon. Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95 %.	– Concevoir, mettre en oeuvre et exploiter des simulations de situations concrètes à l'aide du tableur ou d'une calculatrice.	Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience. A l'occasion de la mise en place d'une simulation, on peut : – utiliser les fonctions logiques d'un tableur ou d'une calculatrice.
Réalisation d'une simulation.	– Exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage.	L'objectif est d'amener les élèves à un questionnement lors des activités suivantes : – l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ; – la prise de décision à partir d'un échantillon.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
concevoir, mettre en oeuvre et exploiter des simulations de situations concrètes						
exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage pour une prise de décision						
exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage pour estimer une proportion inconnue						

1) Échantillonnage

Exemple : si on sait que dans la lycée, parmi les 320 élèves, 240 font partie de l'Association Sportive, on peut dire que la **proportion** d'élèves du lycée appartenant à l'AS est égale à $p = \dfrac{240}{320} = \dfrac{3}{4} = 75\%$.

Si on prend au hasard un élève, qu'on lui demande de dire s'il fait partie de l'AS et qu'on renouvelle 50 fois cette « expérience » (en « remettant » l'élève interrogé parmi ses camarades), on va obtenir une liste de 50 réponses OUI/NON.

> **Définition 1** : un **échantillon aléatoire de taille n** est la liste des résultats obtenus par n répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire.

Exemple : si l'échantillon comporte 29 fois la réponse OUI, la **fréquence** f du caractère « faire partie de l'AS » sur cet échantillon est égal à $\dfrac{29}{50} = 0,58 = 58\%$.

Si on réalise plusieurs échantillons de taille 50, la fréquence f de « faire partie de l'AS » peut varier d'un échantillon à l'autre et il n'est en général pas égal à la proportion $p = 0,75$.

> **Définition 2** : on dit que f **fluctue** autour de p ; on appelle ce phénomène la **fluctuation d'échantillonnage**.

Remarque : bien différencier proportion et fréquence ; à retenir :
- la **fréquence** varie (elle fluctue) ;
- la **proportion** est fixe.

2) Intervalle de fluctuation

2 - 1) Présentation

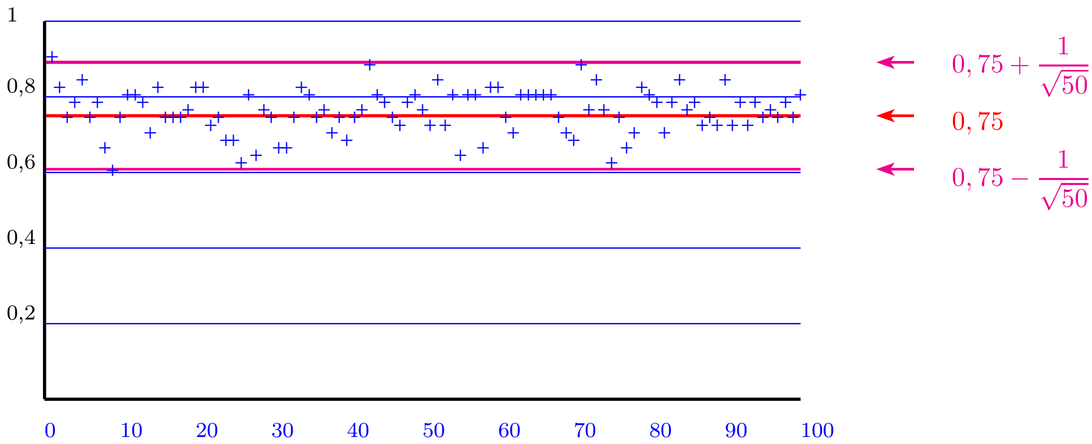
On reprend la situation présentée précédemment que l'on a **simulée** à l'aide d'un tableur.

On a réalisé 10 échantillons de 50 « élèves » pris (un par un) au hasard parmi les 320 lycéens, sachant qu'une proportion égale à 0,75 fait partie de l'AS.

On a calculé la fréquence d'élèves appartenant à l'AS pour chaque échantillon et on a reporté les résultats dans le graphique ci-dessous.

Bien que l'on soit dans une situation de hasard (on prend les élèves au hasard parmi les 320), on remarque que la fréquence des élèves faisant de l'AS est pour presque tous les échantillons comprise dans l'intervalle $\left[0,75 - \dfrac{1}{\sqrt{50}} \,;\, 0,75 + \dfrac{1}{\sqrt{50}}\right]$

fréquence des élèves appartenant à l'AS pour chaque échantillon



Numéro de l'échantillon (de 1 à 100)

Définition 3 : **intervalle de fluctuation**

Si p est la probabilité d'un événement (ou la proportion d'un caractère au sein d'une population), l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une simulation sur un échantillon de taille n est **l'intervalle centré autour de la valeur de p** où se situe la fréquence observée f de cet événement dans l'échantillon, **avec une certitude de 95 %**.

Propriété 1 :
- si la proportion p est telle que $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$;
- si l'échantillon est de taille $n \geqslant 25$;

alors l'intervalle de fluctuation est bien estimé par $\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Remarques :
- il faut comprendre que plus n est grand, plus f se « rapproche » de la valeur de p ;
- cette formule n'est pas exigible ; elle sera rappelée si nécessaire.

2 - 2) Prise de décision

Un intervalle de fluctuation peut aider à prendre une décision par rapport à la **conformité** de l'échantillon étudié par rapport au caractère concerné.

En reprenant l'exemple précédent, on peut se demander si l'échantillon étudié (29 réponses OUI sur 50) est bien conforme au fait que 75 % des lycéens sont inscrits à l'AS. 29 réponses OUI sur 50 donne une fréquence égale à $\frac{29}{50} = 0,68$.
Pour cela, on calcule l'intervalle de fluctuation donné par la formule précédente (on remarque que cette formule s'applique puisque $n = 50 \geqslant 25$ et $p = 0,75 \in [0,2\ ;\ 0,8]$)

Cela donne : $\left[0,75 - \frac{1}{\sqrt{50}}\ ;\ 0,75 + \frac{1}{\sqrt{50}}\right] = [0,608\ ;\ 0,891]$.

Comme $0,68 \in [0,608\ ;\ 0,891]$, on peut conclure que cet échantillon est conforme à la population globale par rapport au critère « faire partie de l'AS ».

De manière plus générale, on peut retenir :

Méthode 1 : conformité d'un échantillon

- si la fréquence d'un caractère observé sur un échantillon de taille n appartient à l'intervalle de fluctuation (à 95 %), on considère que l'échantillon est conforme à la population par rapport à ce caractère ;
- si la fréquence d'un caractère observé sur un échantillon de taille n n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation (à 95 %), on considère que l'échantillon n'est pas conforme à la population par rapport à ce caractère.

3) Estimation d'une proportion à partir d'un échantillon

Contexte : on **connaît la fréquence** f d'un caractère sur un échantillon d'une population.

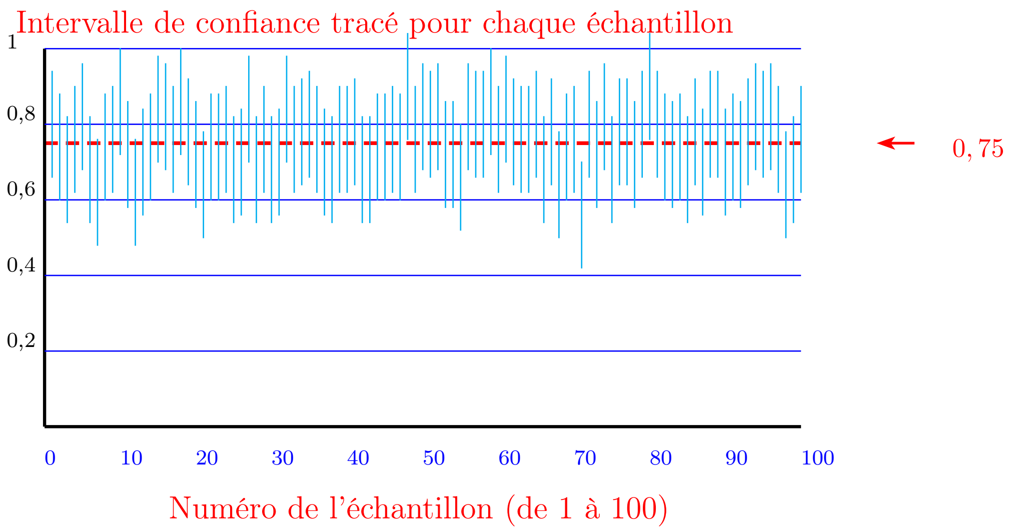
On **veut estimer la proportion** p de ce caractère dans la population entière.

C'est le cas typique du **sondage** d'opinion.

> **Définition 4 : intervalle de confiance**
>
> L'**intervalle de confiance** au seuil de 95 % d'une estimation à partir d'un échantillon de taille n est l'**intervalle centré autour de** f où se situe la **proportion estimée** p d'un caractère dans la population totale, avec une certitude de 95 %.

> **Propriété 2** :
> – si la fréquence f est telle que $0,2 \leqslant f \leqslant 0,8$;
> – si l'échantillon est de taille $n \geqslant 25$;
> alors l'intervalle de confiance est bien estimé par $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Remarques :
- il faut comprendre que plus n est grand, plus p sera estimé précisément par f ;
- cette formule n'est pas exigible ; elle sera rappelée si nécessaire.
- cette formule peut s'obtenir à partir de la formule donnant l'intervalle de fluctuation à 95 %.
- **l'intervalle de confiance ne dépend pas de la taille de la population, mais de la taille de l'échantillon.** Cela signifie en particulier que pour qu'un sondage soit « précis », il faut interroger de l'ordre de 1000 personnes, qu'il s'agisse d'élections locales ou d'élections nationales.



On constate que sur 100 échantillons, 97 ont un intervalle de confiance qui contient la valeur (à estimer) 0,75.

Chapitre 11

Géométrie dans l'espace

Bulletin Officiel (B.O)

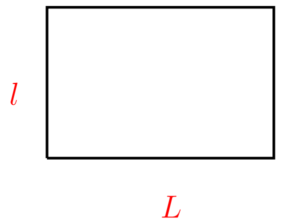
CONTENU	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Géométrie dans l'espace Les solides usuels étudiés au collège : parallélépipède rectangle, pyramides, cônes et cylindres de révolution, sphère. Droites et plans, positions relatives. Droites et plans parallèles.	– Manipuler, construire, représenter en perspective des solides.	C'est l'occasion d'effectuer des calculs de longueurs, d'aires et de volumes. On entraîne les élèves à l'utilisation autonome d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
manipuler, construire, représenter en perspective des solides						
calculer de longueurs, d'aires et de volumes						
connaître les notions de droites et de plans dans l'espace et leurs positions relatives						

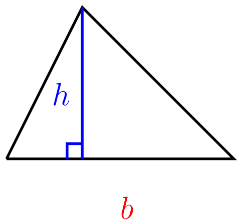
1) Formulaire

1 - 1) Aires



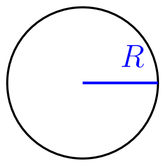
rectangle

$\mathcal{A} = L \times l$



triangle

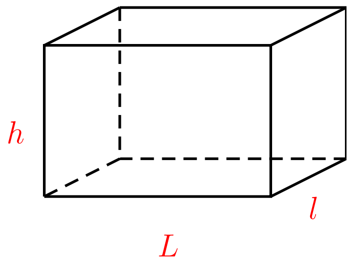
$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$



disque

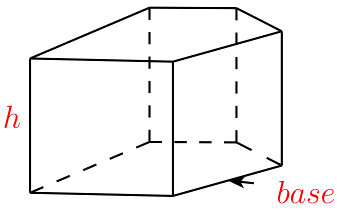
$\mathcal{A} = \pi \times R^2$

1 - 2) Volumes



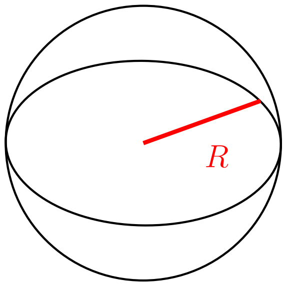
pavé droit

$\mathcal{V} = L \times l \times h$



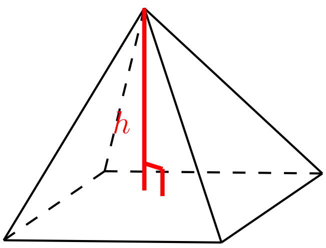
prisme droit

$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h$



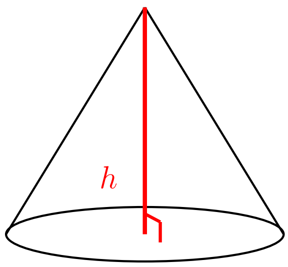
sphère

$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi \times R^3$



$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3}$

pyramide



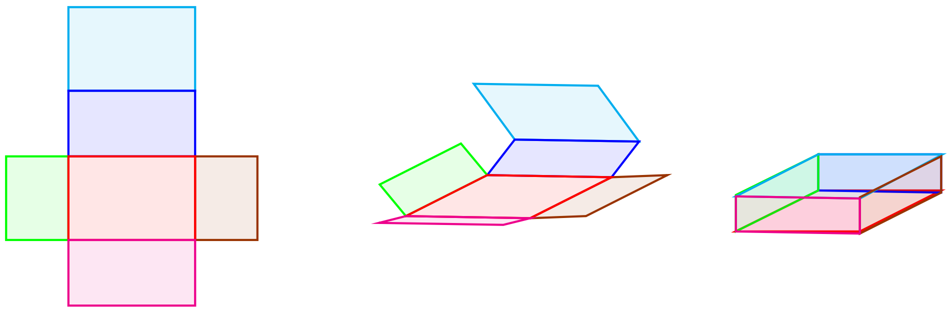
$\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 \times h}{3}$

cône de révolution

2) Représentation de solides

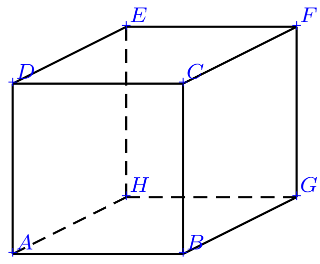
2 - 1) Patrons de solides

Quelques remarques :
- un patron de solide est une figure plane qui permet, par pliage, d'obtenir le solide ;
- il existe souvent plusieurs patrons différents (au sens de non superposables) pour un même solide : par exemple, le cube a 11 patrons différents ;
- certains solides n'ont pas de patron : par exemple, la sphère.



2 - 2) Perspectives cavalières

Quelques principes :
- la perspective cavalière **respecte le parallélisme** (deux droites parallèles en réalité le seront sur la perspective) ;
- la perspective cavalière **respecte l'alignement de points** (des points alignés en réalité le seront sur la perspective) ;
- la perspective cavalière **conserve les proportions** ;
- les segments « cachés » sont **en pointillés**.

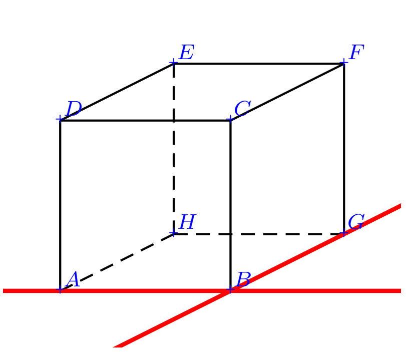
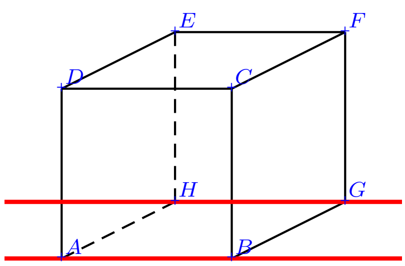
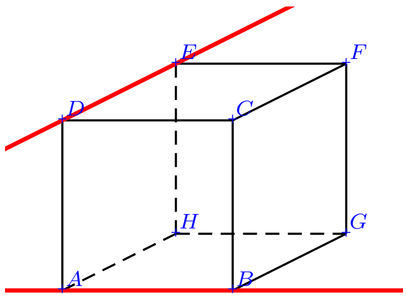


3) Droites et plans de l'espace

- Une droite (de l'espace) peut être déterminée par deux points distincts.
- Un plan peut être défini par trois points **non alignés**.
- Si deux points A et B appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, **tous les points de la droite** (AB) **appartiennent au plan** $\mathcal{P}$: on dit que la droite (AB) est **incluse** dans le plan et on note : $(AB) \subset \mathcal{P}$.
- On peut appliquer les propriétés de la géométrie plane dans un plan de l'espace.
- **Notation** : si trois points A, B et C sont non alignés, on note (ABC) le plan qu'ils définissent.

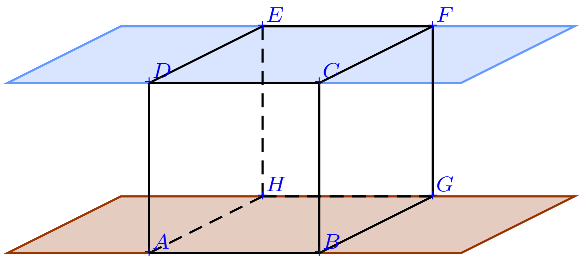
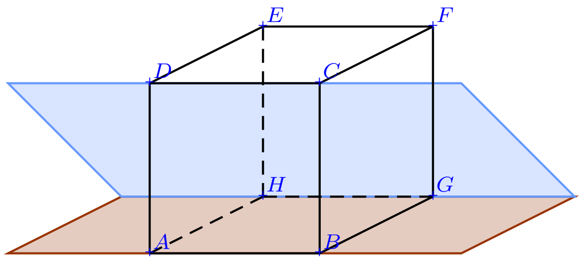
3 - 1) Position relative de deux droites

Deux droites de l'espace sont :
- soit **coplanaires** ;
- soit **non coplanaires**.

<table>
<tr><th colspan="2">Droites coplanaires</th><th>Droites non coplanaires</th></tr>
<tr><td colspan="2">Elles sont dans le même plan donc soit sécantes, soit parallèles</td><td>Il n'existe pas de plan
contenant les deux droites</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(AB) et (BG) sont
sécantes en G
notation : $(AB) \cap (BG) = \{G\}$</td><td>$(AB) \,//\, (HG)$</td><td>(AB) et (ED) ne sont
ni sécantes, ni parallèles</td></tr>
</table>

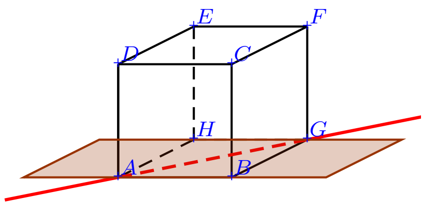
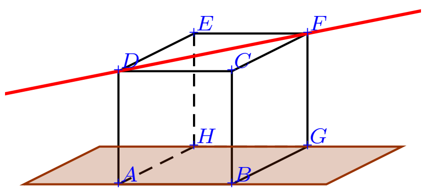
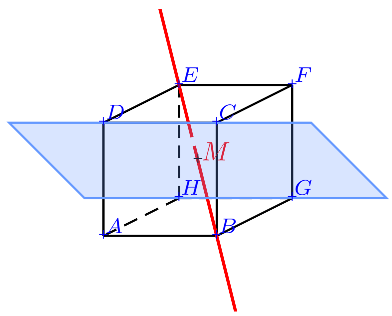
3 - 2) Position relative de deux plans

Deux plans de l'espace sont :
- soit **parallèles** ;
- soit **sécants**.

Plans parallèles	**Plans sécants**
ils sont confondus ou ils n'ont aucun point commun	leur intersection est une droite
	
les plans (ABG) et (DCF) sont parallèles	les plans (ABG) et (CDG) sont sécants notation : $(ABG) \cap (CDG) = (HG)$

3 - 3) Position relative d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan (de l'espace) sont :
- soit **parallèles** ;
- soit **sécants**.

Droite et plan parallèles		**Droite et plan sécants**
La droite est contenue dans le plan ou n'a aucun point commum avec lui		Ils ont un seul point commun
		
La droite (AG) est contenue dans le plan (ABG) notation : $(AG) \subset (ABG)$	La droite (DF) est parallèle au plan (ABG)	(EB) et (DCG) sont sécants en M notation : $(EB) \cap (DCG) = \{M\}$

Chapitre 12

Vecteurs, repérage

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
configuration du plan pour résoudre des problèmes : – utilisation des propriétés des triangles, des quadrilatères et des cercles ; – utilisation des propriétés des symétries axiale et centrale.						
connaître le lien entre l'égalité de deux vecteurs et le parallélogramme						
construire géométriquement la somme de deux vecteurs						
repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées						
calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées						
calculer les coordonnées du milieu d'un segment						
calculer, dans un repère, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de la somme de deux vecteurs et du produit d'un vecteur par un nombre réel						
établir la colinéarité de deux vecteurs						
caractériser l'alignement et le parallélisme par la colinéarité de deux vecteurs						

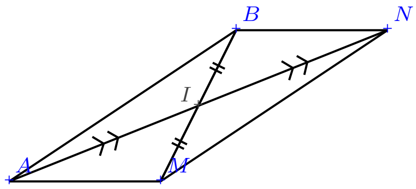
Bulletin Officiel (B.O)

Contenu	Capacités Attendues	Commentaires
Coordonnées d'un point du plan Abscisse et ordonnée d'un point dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Distance de deux points du plan. Milieu d'un segment.	– Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées. – Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées. – Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	Un repère orthonormé du plan est défini par trois points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O. A l'occasion de certains travaux, on pourra utiliser des repères non orthonormés.
Configurations du plan Triangles, quadrilatères, cercles.	Pour résoudre des problèmes : – Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles. – Utiliser les propriétés des symétries axiale ou centrale.	Les activités des élèves prennent appui sur les propriétés étudiées au collège et peuvent s'enrichir des apports de la géométrie repérée.
Vecteurs Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé. Égalité de deux vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Somme de deux vecteurs	– Savoir que équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. – Connaître les coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$. – Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère.	A tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
Produit d'un vecteur par un nombre réel	– Utiliser la notation $\lambda\vec{u}$. – Établir la colinéarité de deux vecteurs.	Pour le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a; b)$ dans un repère, le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a; \lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.
Relation de Chasles	– Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. – Caractériser l'alignement et le parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	

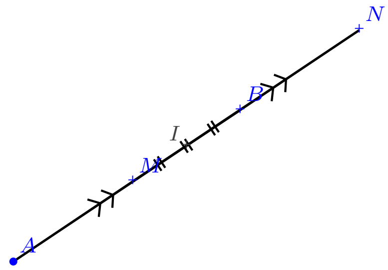
1) Vecteurs

1 - 1) Vecteur et translation

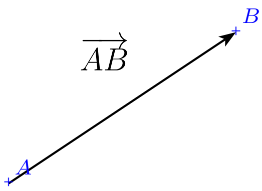
Définition 1 : La **translation** qui transforme A en B transforme tout point M du plan en un unique point N tel que $ABNM$ **est un parallélogramme**.



REMARQUES :
- **Autre formulation** : N est l'image de M par cette translation si et seulement si $[AN]$ et $[BM]$ ont le même milieu.
- Si $M \in (AB)$, alors le parallélogramme est aplati.



Définition 2 : La **translation** qui transforme un point A en un point B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



VOCABULAIRE : B est **l'image** de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

NOTATIONS : on note et on représente un vecteur avec une **flèche**.

Ne pas confondre AB, $[AB]$, (AB) et $\overrightarrow{AB}$.

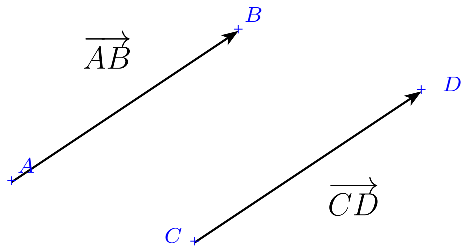
Pour bien comprendre : un vecteur (ici $\overrightarrow{AB}$), est complètement défini par :
- une **direction** : celle de la droite (AB) ;
- un **sens** : ici de A vers B ;
- une **longueur** (que l'on appelle la **norme** du vecteur) : AB.

NOTATION IMPORTANTE : la **norme** d'un vecteur se note $||\overrightarrow{AB}||$

On a donc : $||\overrightarrow{AB}|| = AB = BA = ||\overrightarrow{BA}||$

1 - 2) Égalité de deux vecteurs

Définition 3 : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsque la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme C **en** D.



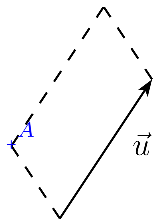
Notation : on note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Vocabulaire : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la même que translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, bien que les points A, B, C, D soient différents.

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux **représentants d'un même vecteur**. On nomme souvent les vecteurs par une lettre qui ne dépend pas du représentant : par exemple, $\vec{u}$.

Lorsque l'on représente un vecteur $\overrightarrow{AB}$,
- A est **l'origine** du représentant ;
- B est **l'extrémité** du représentant

Méthode 1 : pour construire un représentant d'un vecteur connu, il faut construire un parallélogramme avec l'origine (ou l'extrémité) voulue.

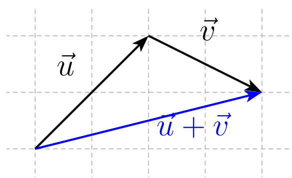


1 - 3) Opérations sur les vecteurs

Propriété 1 : en enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ et la translation de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation.

Cette propriété permet de définir la **somme** de deux vecteurs :

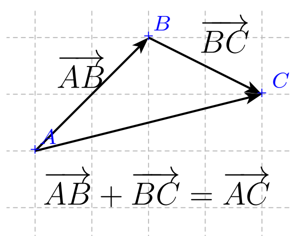
Définition 4 : Le vecteur associé à l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\vec{v}$, est appelé **somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$** et est noté $\vec{u} + \vec{v}$.



Remarques :
- L'ordre n'a pas d'importance ; autrement dit : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- On peut enchaîner trois translations ou plus et obtenir par exemple $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

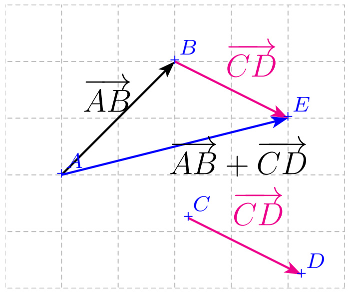
Propriété 2 : **relation de Chasles**

Pour tous points du plan A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



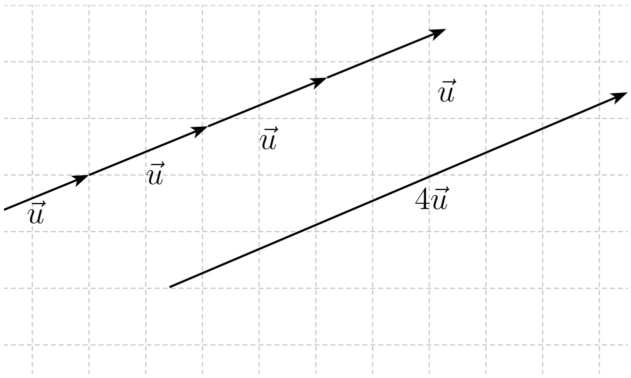
Cette relation permet de donner une méthode pour additionner deux vecteurs quelconques :

Méthode 2 : **pour additionner deux vecteurs** :
- prendre un représentant du second vecteur qui a pour origine l'extrémité du premier vecteur ;
- le vecteur somme a pour origine l'origine du premier vecteur et pour extrémité l'extrémité du second vecteur.



Si on ajoute successivement n fois le vecteur $\vec{u}$ en utilisant la méthode précédente, on définit une **multiplication** (par un nombre entier naturel pour le moment) :

Méthode 3 : **pour multiplier un vecteur par n (entier naturel)** :
- on utilise la méthode de la somme n fois de suite ;
- en résumé : $n \times \vec{u} = \underbrace{\vec{u}+\vec{u}+\ldots+\vec{u}}_{n \text{ fois}}$



Définition 5 : on appelle vecteur nul le vecteur associé à la translation qui transforme tout point en lui même.

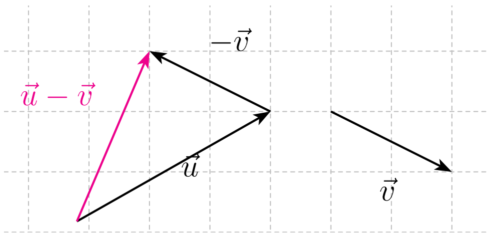
Notation : le vecteur nul se note $\vec{0}$

Remarque : pour tout point A, $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Définition 6 : le vecteur **opposé au vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, vecteur associé à la translation qui transforme B en A.

Notation : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

Méthode 4 : **pour soustraire deux vecteurs** :
- faire la somme du premier vecteur et de l'opposé du second vecteur ;
- en résumé : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(\vec{-v})$



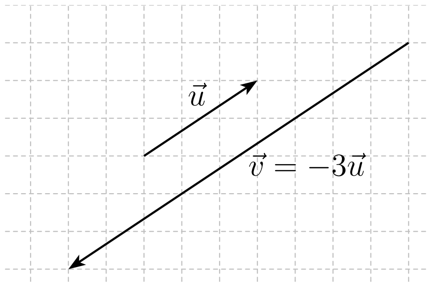
Cela permet de compléter $n \times \vec{u}$ dans le cas où n est négatif :
il suffit d'écrire $n \times \vec{u} = (-n) \times (-\vec{u})$ et d'appliquer la méthode vue pour le produit d'un nombre entier positif par un vecteur.

On généralise ces résultats pour un nombre k réel : $k \times \vec{u}$ est :
* la « répétition » k fois du vecteur $\vec{u}$ si $k > 0$;
* la « répétition » $-k$ fois du vecteur $-\vec{u}$ si $k < 0$;

1 - 4) Colinéarité

Définition 7 : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$.

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.



Méthode 5 : **pour montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires**, on peut chercher le réel k tel $\vec{u} = k \times \vec{v}$.

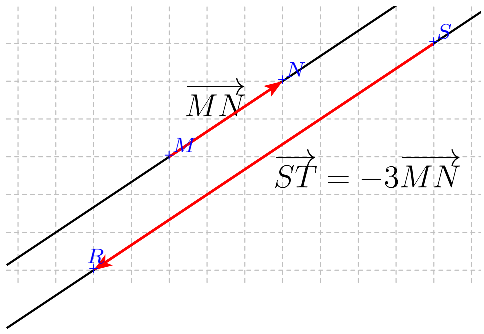
1 - 5) Parallélisme et alignement

Propriété 3 : soient A, B, C et D quatre points du plan.

(AB) et (CD) sont **parallèles**

$\Longleftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**

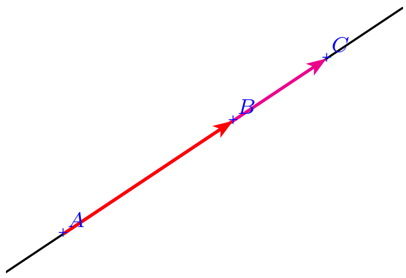


Propriété 4 : soient A,B et C trois points du plan.

A, B et C sont **alignés**

$\Longleftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**



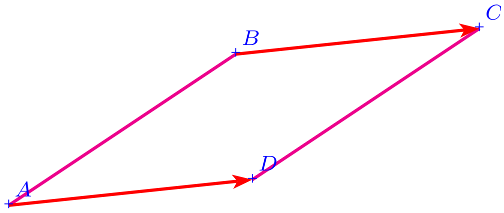
1 - 6) Vecteurs et parallélogramme

Propriété 5 :

$ABCD$ est un parallélogramme

$$\Longleftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

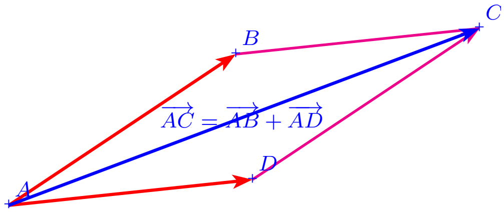


Propriété 6 : identité du parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme

$$\Longleftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



Preuve : d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

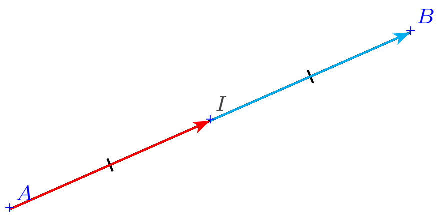
$\Longrightarrow$
Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; on a donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\Longleftarrow$
Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, on a alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ce qui donne $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

1 - 7) Vecteur et milieu

Propriété 7 :

$$I \text{ est le milieu du segment } [AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$



PREUVE :

$\Longrightarrow$

Si I est le milieu de $[AB]$, alors les diagonales du quadrilatère aplati $AIBI$ se coupent en leur milieu car I est le milieu de $[AB]$ et évidemment de $[II]$. $AIBI$ est donc un parallélogramme, c'est à dire $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

$\Longleftarrow$

Si Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors $AIBI$ est un parallélogramme par définition des vecteurs, et donc ses diagonales se coupent en leurs milieux. Les diagonales de $AIBI$ sont $[AB]$ et $[II]$. Puisque le milieu de $[II]$ est évidemment I, I est bien le milieu de $[AB]$.

2) Repère du plan

2 - 1) Notation

On définit un repère du plan par **trois points non alignés** (O, I, J). Par convention :
- (OI) est l'axe des abscisses ;
- (OJ) est l'axe des ordonnées.

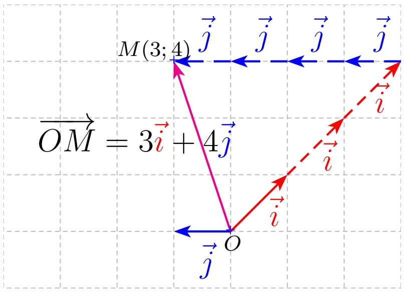
Notation vectorielle : Soit un repère(O, I, J). En définissant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, on peut noter ce repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- I est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$;
- J est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{j}$.

Différents types de repères :
- lorsque (OI) et (OJ) sont **perpendiculaires**, on dit que le repère est **orthogonal** ;
- Lorsque $OI = OJ$, on dit que le repère est **normé** ;
- Lorsque le repère est à la fois orthogonal et normé, il est **orthonormal** (on dit aussi **orthonormé**).

2 - 2) Coordonnées dans un repère

Coordonnées d'un point

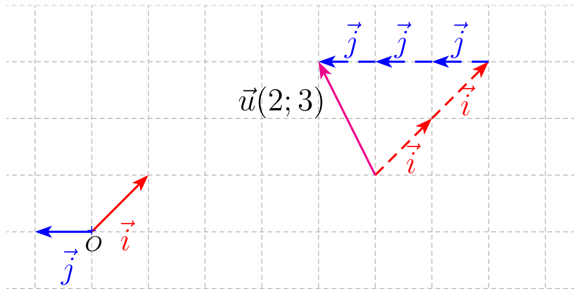
Définition 8 : Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, dire qu'un point M a pour coordonnées $(x_M;y_M)$, c'est dire que : $\overrightarrow{OM} = x_M \times \vec{i} + y_M \times \vec{j}$



Autre formulation :
$M(x_M;y_M)$ est l'image de O dans l'enchaînement de x_M fois la translation de vecteur $\vec{i}$, suivie de y_M fois la translation de vecteur $\vec{j}$.

Coordonnées d'un vecteur

Définition 9 : Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, dire qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$, c'est dire que : $\vec{u} = x \times \vec{i} + y \times \vec{j}$



Autre formulation : $\vec{u}$ est le vecteur issu de la translation de x fois la translation de vecteur $\vec{i}$, suivie de y fois la translation de vecteur $\vec{j}$.

Notation :
$\vec{u}(2;3)$ ou $\vec{u}\binom{2}{3}$ signifie que $\vec{u} = 2\vec{i}+3\vec{j}$

Remarque Importante : dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on admet qu'il n'y a qu'une seule expression d'un vecteur en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$: les coordonnées d'un vecteur et d'un point sont donc **uniques** pour ce repère.

2 - 3) Exprimer des coordonnées dans un repère

Égalité de vecteurs

Propriété 8 : Dans un repère du plan, avec $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$,

$$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Remarque :
- Pour bien comprendre : $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si il y a autant de $\vec{i}$ dans $\vec{u}$ que dans $\vec{v}$ $(x = x')$, et autant de $\vec{j}$ dans $\vec{u}$ que dans $\vec{v}$ aussi $(y = y')$.

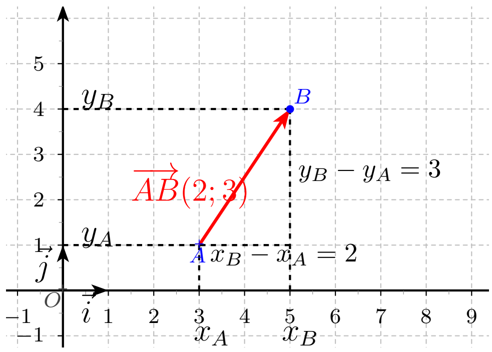
Méthode 6 : pour retranscrire une égalité vectorielle en coordonnées, la notation sous forme de système est efficace.

Coordonnées d'un vecteur donné par ses extrémités

Propriété 9 : Dans un repère du plan, avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$(x_B - x_A; y_B - yA)$$

On note $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - yA)$ ou $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$



PREUVE : par le relation de Chasles,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Or (par définition des coordonnées),$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$

Donc, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) = x_B\vec{i} - x_A\vec{i} + y_B\vec{j} - y_A\vec{j} = (x_B - x_A)\vec{i} - (y_B - y_A)\vec{j}$

Coordonnées du vecteur opposé, coordonnées de la somme de deux vecteurs

Propriété 10 : Dans un repère du plan, avec $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ du plan, les coordonnées de :

* $-\vec{u}$ sont $(-x;-y)$;
* $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'; y + y')$.

PREUVE :
* $-\vec{u} = -(x\vec{i} + y\vec{j}) = -x\vec{i} - y\vec{j}$;
* $\vec{u} + \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$.

Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Propriété 11 : Dans un repère du plan, avec $\vec{u}(x;y)$ et $k \in \mathbb{R}$, les coordonnées du vecteur $k \times \vec{u}$ sont $(k \times x; k \times y)$

On note $k\vec{u}(kx;ky)$ ou encore $k\vec{u}\binom{kx}{ky}$

PREUVE :

$k\vec{u} = k \times (x\vec{i} + y\vec{j}) = kx \times \vec{i} + ky \times \vec{j}$

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 12 : Dans un repère du plan, avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan,

$I(x_I;y_I)$ **milieu du segment** $[AB]$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{array}\right.$$

PREUVE :

$$I \text{ milieu de } [AB] \Longleftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_I - x_A = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \\ y_I - y_A = \frac{1}{2}(y_B - y_A) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_I = x_A + \frac{x_B-x_A}{2} \\ y_I = y_A + \frac{y_B-y_A}{2} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_I = \frac{2x_A+x_B-x_A}{2} \\ y_I = \frac{2y_A+y_B-y_A}{2} \end{array}\right.$$

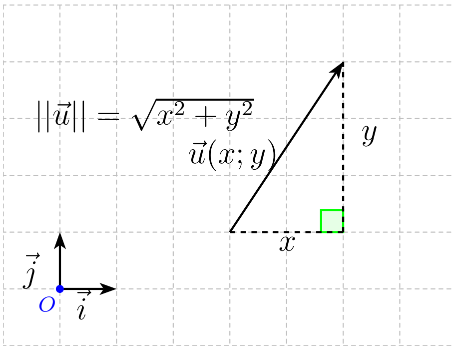
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A+y_B}{2} \end{array}\right.$$

2 - 4) Distance en repère orthonormé

Propriété 13 : norme d'un vecteur $\vec{u}(x;y)$

Dans un repère **orthonormal** du plan,

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$$



PREUVE : Puisque le repère est orthonormal, on peut construire un triangle rectangle de côtés mesurant x et y entre l'origine et l'extrémité des représentants de $\vec{u}$.

Puisqu'il est normé, ajouter les carrés des distances en abscisses et ordonnées a un sens (même unité de mesure).

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore et obtenir le résultat.

Propriété 14 : distance entre deux points

Dans un repère **orthonormal** du plan, avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points,

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

PREUVE : $AB = ||\overrightarrow{AB}||$; il suffit de remarquer que $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$ et appliquer la propriété précédente.

REMARQUE : comme $AB \geqslant 0$,
$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \Longleftrightarrow AB^2 = (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$

2 - 5) Colinéarité : expression dans un repère

Propriété 15 : Dans un repère du plan, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Longleftrightarrow$ les coordonnées de $\vec{u}$ et celles de $\vec{v}$ sont **proportionnelles**

Cette propriété permet de mettre en place la méthode suivante :

Méthode 7 : **pour démontrer la colinéarité de deux vecteurs**

pour montrer que deux vecteurs sont ou ne sont pas colinéaires, on peut utiliser **les méthodes de proportionnalité**, comme tester l'égalité des produits en croix :

$$\vec{u}(x;y) \text{ et } \vec{v}(x';y') \text{ sont colinéaires} \Longleftrightarrow xy' = x'y \Longleftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Chapitre 13

Équations de droites

Bulletin Officiel (B.O)

CONTENU	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Droites Droite comme courbe représentative d'une fonction affine. Équations de droites.	– Tracer une droite dans le plan repéré. – Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite. – Caractériser analytiquement une droite.	On démontre que toute droite a une équation soit de la forme $y = mx + p$, soit de la forme $x = c$.
Droites parallèles.	– Établir que trois points sont alignés, non alignés. – Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes. – Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.	On fait la liaison avec la colinéarité de vecteurs. C'est l'occasion de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite						
caractériser une droite par une équation						
tracer une droite dans un plan repéré						
reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes						
établir que trois sont ou non alignés						
déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes						

Dans tout ce chapitre, on se place dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Équation de droite

1 - 1) Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 1 : les vecteurs directeurs d'une droite(AB) sont tous les vecteurs non nuls $(\neq \vec{0})$ qui sont colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques :

Il existe une infinité de vecteurs directeurs d'une droite. Ils sont tous colinéaires entre eux.

Pour caractériser géométriquement une droite, on peut :
– donner deux points ;
– donner un point et un vecteur directeur.

1 - 2) Équations cartésiennes de droite

Définition 2 : une équation de droite du type $ax+by+c=0$ est appelée **équation cartésienne** (avec au moins a ou b non nul).

Remarque : une droite a une infinité d'équations cartésiennes, qui sont toutes équivalentes à un coefficient multiplicatif près.

Important : il n'est pas nécessaire en seconde de savoir retrouver une équation cartésienne de droite, mais cela permet d'interpréter graphiquement des systèmes d'équations, et d'introduire les équations réduites.

1 - 3) Équation réduite d'une droite

Propriété 1 : dans un repère quelconque, toute droite a une **unique équation réduite** de la forme $y = mx + p$ ou $x = c$, avec m, p et c des nombres réels qui caractérisent la droite.

Vocabulaire :
– m est le **coefficient directeur** de la droite ;
– p est l'**ordonnée à l'origine** de la droite.

Méthode 1 : appartenance à une droite dont on connaît une équation.

Une équation de droite a deux inconnues. **On ne peut pas la résoudre**, mais on peut l'utiliser pour **savoir si un point M appartient à la droite** : il s'agit de tester l'équation avec les coordonnées de M.

Exemples :
– le point $M(2; 3)$ appartient à la droite d'équation réduite $y = 5x - 7$ car $3 = 5 \times 2 - 7$
– le point $M(2; 3)$ n'appartient pas à la droite d'équation réduite $y = 4x-6$ car $3 \neq 4\times2-6$

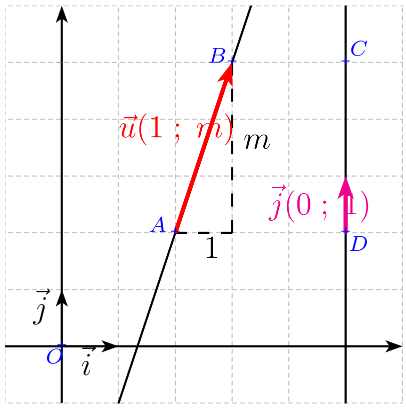
Important : sur une droite d'équation réduite $y = mx+p$, l'ordonnée des points est fonction de l'abscisse, et cette fonction est affine. Cela explique la propriété de représentation des fonctions affines ...

REMARQUES :
– Les droites parallèles à (Oy) ont une équation réduite du type : $x = c$
– Les autres ont une équation réduite du type :$y = mx + p$

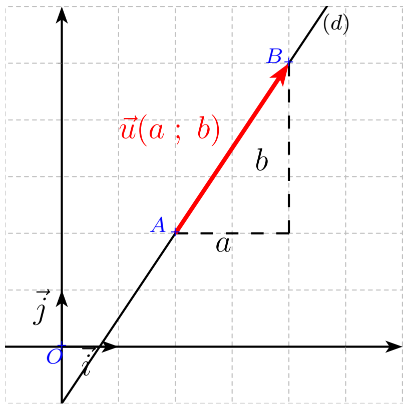
Propriété 2 : un vecteur directeur facile à trouver

Une droite d'équation réduite $y = mx + p$ a pour vecteur directeur (entre autres) $\vec{u}(1\ ;\ m)$

Une droite d'équation réduite $x = c$ a pour vecteur directeur (entre autres) $\vec{j}(0\ ;\ 1)$



Propriété 3 : Si un vecteur $\vec{u}(a\ ;\ b)$ avec $b \neq 0$ dirige une droite (d), alors le coefficient directeur de (d) est $\dfrac{b}{a}$



PREUVE : le vecteur $\vec{v}\left(1; \dfrac{b}{a}\right)$ est colinéaire à $\vec{u}$, car $\vec{u} = a \times \vec{v}$, et dirige donc aussi (d). D'après la propriété précédente, on a bien $m = \dfrac{b}{a}$

REMARQUE : le coefficient directeur qui s'obtient en faisant $\dfrac{b}{a}$ est à mettre en rapport avec des calculs effectués sur les fonctions affines.

2) Droites parallèles ou sécantes

2 - 1) Parallélisme et coefficient directeur

Propriété 4 : Deux droites du plan sont soit :
- **sécantes** ;
- **parallèles** (elles peuvent alors être confondues ou « strictement » parallèles).

VOCABULAIRE : étudier la **position relative** de deux droites, c'est déterminer si elles sont sécantes, parallèles (strictement ou confondues).

Propriété 5 : parallélisme et coefficient directeur

Deux droites d'équations réduites $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$ sont parallèles

$$\iff$$

$$m_1 = m_2$$

En conséquences, deux méthodes à connaître :

Méthode 2 : la propriété étant une équivalence, si $m_1 \neq m_2$, alors les droites sont sécantes.

Méthode 3 : pour trouver l'équation réduite d'une droite (D') parallèle à une autre droite (D) connue, passant par un point A :
- le coefficient directeur de (D') est connu (c'est celui de (D)) ;
- on détermine l'ordonnée à l'origine en remplaçant les coordonnées de A dans l'équation de (D')

2 - 2) Alignement

Propriété 6 :

trois points A, B et C d'abscisses distinctes sont alignés

$$\iff$$

les coordonnées de C vérifient une équation de (AB)

$$\iff$$

les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur

$$\iff$$

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires