

DS3 – Secondes – 2h – Calculatrice autorisée

Consigne :

- Traiter tout le sujet sur copie(s) double(s) sauf la courbe de l'exercice 2.
- Le barème indicatif est sur 22 : la note sera conservée sur 20.
- Laisser une marge à gauche sur chaque page si elle n'existe pas sur votre copie.

Exercice 1 : bases d'analyse et d'algèbre

(4 points)

Soit la fonction k définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $k(x) = 2x^2 - 4x - 6$

- 1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = 2(x+1)(x-3)$
b) Montrer aussi que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = 2(x-1)^2 - 8$
- 2) Etudier l'extremum de k , c'est à dire, donner et justifier :
 - son type (minimum ou maximum),
 - sa valeur,
 - la valeur de x pour laquelle il est atteint.
- 3) Résoudre l'équation $k(x) = -6$.

Exercice 2 : étude des fonctions

(4 points)

On définit trois fonctions :

- m telle que $m(x) = -2x - 1$
- f par sa représentation graphique C_f qui est une parabole.
- g par sa représentation graphique C_g qui est une droite.

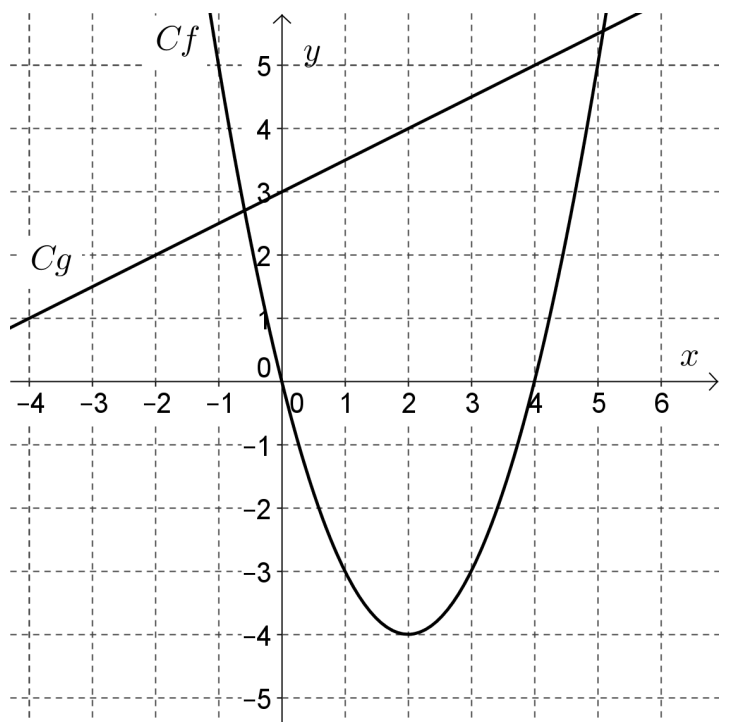
- 1) Tracer sur le sujet la représentation graphique de m .

- 2a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

- b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq -3$

- 3) Retrouver par lecture graphique l'expression de $g(x)$.

- 4) Résoudre par le calcul l'équation $m(x) = g(x)$
(cette question nécessite d'avoir répondu à la 3)



Exercice 3 : question de chaussettes**(4 points)**

Dans votre tiroir se trouve cinq chaussettes : deux sont rouges, deux sont bleues et une seule est verte. Elles sont indiscernables au toucher.

On va prendre au hasard une chaussette, puis une autre.

On observe la couleur des deux chaussettes que l'on a en main.

1. Construire un arbre traduisant la situation présentée ici.
2. Montrer que la probabilité d'avoir une chaussette verte est égale à $0,4$
3. On note :
 - R_1 l'événement : « obtenir une chaussette rouge au premier tirage » ;
 - R_2 l'événement : « obtenir une chaussette rouge au second tirage » ;Écrire avec les notations précédentes et les notations du cours l'événement : « obtenir au moins une chaussette rouge »
4. Donner la probabilité d'obtenir deux chaussettes rouges.
5. (a) Donner la probabilité d'obtenir deux chaussettes de la même couleur.
(b) Donner la probabilité d'obtenir deux chaussettes de couleurs différentes.

Exercice 4 : étude de quatre catapultes**(3 points)**

Vous faites une « étude de marché » pour obtenir la catapulte la plus appropriée à vos besoins : vous voulez qu'elle soit précise et qu'elle vise juste.

Un réglage permet de modifier la portée du lancer.

Vous avez le choix entre quatre modèles : les catapultes n°1, n°2, n°3 et n°4.

Toutes les données sont fournies pour des tirs de catapulte réglés sur une portée de 10 m.

On a noté la portée des tirs réalisés par la catapulte n°1 ; les résultats sont classés dans l'ordre croissant :

4 ; 5,8 ; 8 ; 9,6 ; 10 ; 11,3 ; 14,2 ; 16 ; 17,2 ; 18 ; 22,3 ; 24 ; 28 ; 28,1 ; 29 ; 31

1. Donner le résumé statistique de cette série (minimum, premier quartile, médiane, troisième quartile, maximum). Cette catapulte avait été réglée pour des tirs de 10 mètres de portée ; visiblement, elle n'est pas satisfaisante et est mise de côté.
2. Voici le résumé statistique donné par les constructeurs pour les catapultes n°2 et n°3 :
 - catapulte n°2 :

$Min = 6 \text{ m} ; Q_1 = 7,5 \text{ m} ; Me = 10,2 \text{ m} ; Q_3 = 12 \text{ m} \text{ et } Max = 16,2 \text{ m}$
 - catapulte n°3 :

$Min = 9,7 \text{ m} ; Q_1 = 10,9 \text{ m} ; Me = 11,2 \text{ m} ; Q_3 = 11,4 \text{ m} \text{ et } Max = 11,8 \text{ m}$

Pour la catapulte n°4, on ne vous donne pas de résumé statistique. Vous faites vous-même cinquante essais qui sont résumés dans le tableau ci-dessous :

portée (en mètres)	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[
effectif	1	6	20	18	3	2

A partir des données des constructeurs pour les catapultes n°2 et n°3, et en analysant les résultats des essais de la catapulte n°4, faites votre choix d'acquisition entre ces trois catapultes.

Votre réponse sera argumentée par des éléments statistiques.

Exercice 5 : la catapulte de Godefroy

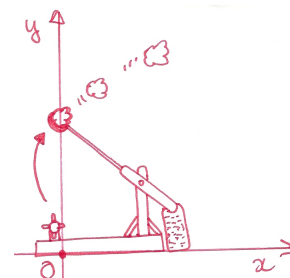
(4 points)

Godefroy a mis au point une catapulte qui projette des boulets.

Leur trajectoire, comme tout solide sous l'effet de la pesanteur, est une parabole.

Pour étudier ces trajectoires, on définit un repère comme sur ce croquis :

- Le sol est l'axe des abscisses.
- Les ordonnées sont sur un axe vertical.
- L'origine O est à la verticale du point de départ du boulet.
- L'unité graphique est le mètre.



L'altitude du boulet dépend de l'avancée x et est donnée par :

$$h(x) = -0,1(x - 14)^2 + 22,5$$

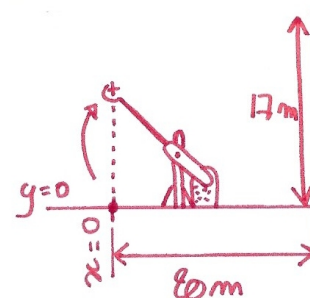
Dans cet exercice, il est demandé de répondre en utilisant les outils et notations mathématiques vues en cours.

Toute initiative pertinente sera valorisée.

Les questions sont indépendantes.

- 1) La catapulte est placée devant une palissade (voir croquis).

Question : le boulet passe-t-il au dessus de la palissade ?



- 2) Godefroy se demande si sa catapulte peut envoyer un boulet au dessus d'un mur de 20m de haut.

Question : est-ce possible ?

Si oui, à quelle distance de la muraille par exemple peut-il placer sa catapulte ?

- 3) Avec cette catapulte, Godefroy voudrait passer à l'attaque du château voisin dont les murailles mesurent 25m de haut.

Question : peut-il projeter des boulets à l'intérieur de ce château ?

Si oui, à quelle distance de la muraille peut-il placer par exemple sa catapulte ?

- 4) La catapulte est placée dans un champ sans aucun obstacle.

Question : à quelle distance de la catapulte retombe le boulet ?

Un peu de culture ? (remarque d'un éminent professeur d'histoire)

Au moyen-âge, les lanceurs avec contrepoids comme sur la figure s'appellent des trébuchets et non des catapultes.

Il aurait donc fallu se placer au temps romain pour une catapulte, ou parler de trébuchet dans cet exercice.

Les deux exercices suivants sont au choix : l'un ou l'autre.

Exercice 6 a)

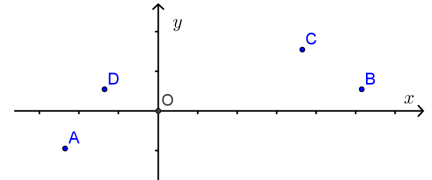
(3 points)

On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles que l'on appelle les bases.

Le trapèze est dit isocèle si les deux autres côtés ont la même mesure.

Dans un repère orthonormé, on définit les points suivants (voir figure) :

A(-47 ; -19) B(103 ; 11) C(73 ; 31) D(-27 ; 11)



Questions :

- 1) Montrer que ABCD est un trapèze.
- 2) Montrer que ABCD est un trapèze isocèle.
- 3) Déterminer les coordonnées d'un point E tel que ABED est un parallélogramme.

Remarque : il n'est pas demandé de compléter ni de faire une figure.

Exercice 6 b)

(3 points)

On définit la fonction polynôme f par $f(x) = -5x^2 + \frac{71}{6}x + \frac{5}{3}$

- 1) Retrouver la forme factorisée de $f(x)$ parmi les trois expressions en justifiant votre réponse par le calcul.

$$f_1(x) = \left(5x + \frac{2}{3}\right)(5 - 2x)$$

$$f_2(x) = x\left(\frac{71}{6} - 5x\right) + \frac{5}{3}$$

$$f_3(x) = \left(5x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2} - x\right)$$

- 2) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- 3) Résoudre l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$