**durée : 2 heures** **calculatrice autorisée**

**Proposition de corrigé**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les réponses peuvent être complétées sur le sujet ; vous pouvez aussi compléter sur une feuille à part.

Sauf si cela est précisé, on attend des réponses détaillées : par de résultat sans aucune argumentation !

Ce devoir comporte **7 exercices**.

---

***Exercice* 1** : /1 point

On a demandé à un élève de dire si une fréquence $f = 35\%$ appartenait à l'intervalle de fluctuation correspondant à une probabilité égale à 40 % sur un échantillon de taille $n = 200$.

Voici le travail qu'il a réalisé :

> Comme $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, on peut appliquer la formule $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
>
> En remplaçant par les valeurs de l'exercice, cela donne : $\left[40 - \frac{1}{\sqrt{200}} ; 40 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] = [39,9 ; 40,1]$
>
> Comme $f = 35 \notin [39,9 ; 40,1]$, on conclut que la fréquence n'appartient par à l'intervalle de fluctuation.

Cet élève a commis une erreur : identifiez-la et corrigez-la.

L'erreur vient du fait qu'il a écrit 40 au lieu de 40 % ; en effet, 40 %=0,4.

Les valeurs numériques deviennent : $\left[0,4 - \frac{1}{\sqrt{200}} ; 0,4 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] = [0,33 ; 0,47]$

On remarque alors que $f$ appartient à cet intervalle de fluctuation.

---

***Exercice* 2** : /3 points

On souhaite savoir si une entreprise exerce une discrimination à l'embauche vis-à-vis du personnel féminin.

S'il n'y a pas de discrimination, la proportion de femmes dans cette entreprise devrait être représentative de la proportion de femmes dans la population active. On admet que la proportion de femme dans la population active est 0,5.

1) En utilisant l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, déterminez si une entreprise comptant 1183 femmes sur 2540 salariés exerce une discrimination à l'égard des femmes.

> On est dans les conditions permettant d'utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation à 95% ($p = 0,5 \in [0,2;0,8]$ et $n = 2540 > 25$)
>
> Cela donne :
> $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,5 - 0,02 ; 0,5 + 0,02] = [0,48 ; 0,52]$ La fréquence des femmes dans cette entreprise est $\frac{1183}{2540} \approx 0,47 \approx 47\%$
>
> Comme $f \notin [0,48;0,52]$, on peut conclure que cette entreprise exerce une discrimination à l'égard des femmes.

2) Quel doit être le nombre minimal de femmes dans cette entreprise pour que l'on ne puisse plus considérer que cette entreprise exerce une discrimination à l'égard des femmes (on considérera qu'il y a toujours 2540 employés dans l'entreprise).

La fréquence de femme doit être au minimum égale à 0,48 ; autrement dit, les femmes doivent représenter au moins 48% des salariés.

Cela donne : 48% × 2540 ≈ 1220.

Ainsi, s'il y a plus de 1220 femmes dans cette entreprise, on pourra considérer que l'entreprise n'exerce pas de discrimination à l'égard des femmes.

---

***Exercice* 3** : /2 points

Vous devez conseiller un avocat qui défend des habitants d'une commune proche d'une zone industrielle a priori polluante.

Voici un extrait du dialogue entre l'avocat et le juge qui doit décider de la poursuite de l'enquête :

* *l'avocat* : « lors des deux dernières années, sur 100 naissances, il y a eu 42 garçons, ce qui donne une fréquence de 42% de garçons parmi les naissances. Or, il est connu, que cette fréquence est théoriquement proche de 51%. »

* *le juge* : « certes, mais 42%, ce n'est pas si loin de 51%, sans doute est-ce le hasard ... »

* *l'avocat* : « justement non ! Dans une précédente affaire que j'ai menée, près de la zone industrielle X, il y avait eu au cours des trois dernières années 168 garçons sur 400 naissances, ce qui donne une fréquence exactement égale à 42 % ; le juge de l'époque avait décidé que cette fréquence était suffisamment étonnante pour mener une enquête ... »

* *le juge, après un temps de réflexion et quelques calculs sur un bout de papier* : « mon collègue juge et moi-même sommes de fins mathématiciens, ce qui ne semble pas être votre cas ... Je ne pense pas que vos arguments soient suffisants. »

* *l'avocat* : « mais enfin, dans les deux cas, la fréquence des naissances de garçons est égale à 42%, ce sont des cas similaires, je ne comprends pas ! »

Aidez cet avocat à comprendre la décision du juge.

Ces juges ont une bonne formation mathématique ! Ils ont repéré qu'ils pouvaient utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation à 95%, étant donné que la probabilité en jeu est 51% (comprise entre 0,2 et 0,8) et que dans les deux cas, la taille des échantillons est supérieure à 25.

**Affaire précédente** :
Le juge de l'époque avait fait le calcul suivant :
$\left[0,51 - \frac{1}{\sqrt{400}} ; 0,51 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right]$, ce qui donne : $[0,46 ; 0,56]$.
Si les naissances se déroulent conformément au hasard, la fréquence des naissances de garçons est, dans 95% des cas, dans l'intervalle [0,46 ;0,56].
Ce n'était pas le cas dans cette affaire où la fréquence des naissances de garçons était égale à 42%.
Le juge était sûr (à 95%) qu'il y avait une « anomalie » qui justifiait d'ouvrir une enquête.

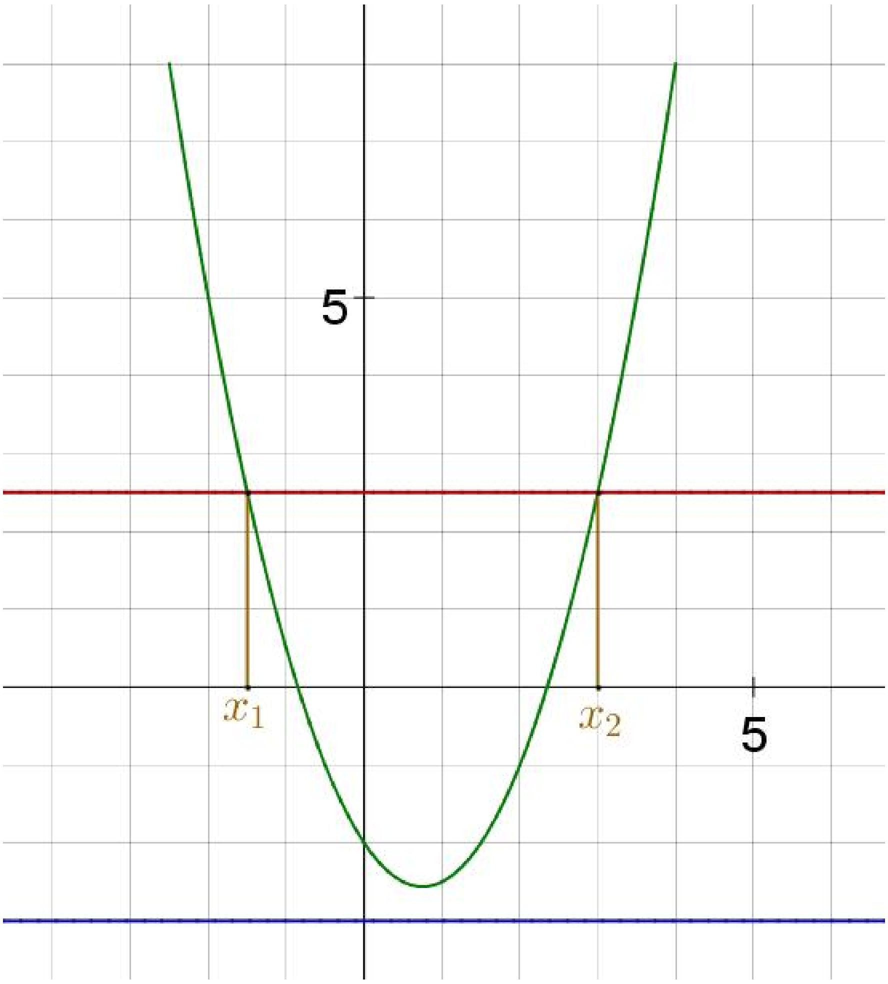
**Affaire du moment** :
Le juge a rapidement fait le calcul suivant :

$\left[0,51-\frac{1}{\sqrt{100}};0,51+\frac{1}{\sqrt{100}}\right]$, ce qui donne : $[0,41;0,61]$.
Si les naissances se déroulent conformément au hasard, la fréquence des naissances de garçons est, dans 95% des cas, dans l'intervalle [0,41 ;0,61].
C'est le cas dans cette affaire où la fréquence des naissances de garçons est égale à 42%.
Le juge est sûr (à 95%) qu'il n'y a rien d'anormal. Le risque de se tromper (5%) lui paraît trop faible pour mener une enquête.

---

***Exercice* 4** : /6 points

1. Construisez la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto x^2-1,5x-2$ sur l'intervalle $[-2,5\,;4]$ dans le repère ci-dessous :




2. D'après le graphique, combien l'équation $f(x) = -3$ a-t-elle de solution(s) ?

Il ne semble pas y avoir de solution.

3. D'après le graphique, donnez les valeurs approchés des solutions de l'équation $f(x) = 2,5$.

On conjecture : $x_1 \approx -1,5$ et $x_2 \approx 3$

4. **a.** Montrer que $(x-3)(x+1,5) = x^2 - 1,5x - 4,5$

On développe, et on réduit l'expression :

$(x-3)(x+1,5) = x^2 - 3x + 1,5x - 3 \times 1,5 = x^2 - 1,5x - 4,5$

**b.** Montrer que l'équation $f(x) = 2,5$ revient à résoudre $(x-3)(x+1,5) = 0$

$$\begin{array}{lll} f(x) = 2,5 & \text{revient à} & x^2 - 1,5x - 2 = 2,5 \\ & \text{revient à} & x^2 - 1,5x - 2 - 2,5 = 0 \\ & \text{revient à} & x^2 - 1,5x - 4,5 = 0 \\ & \text{revient à} & (x-3)(x+1,5) = 0 \end{array}$$

**c.** En utilisant les questions précédentes, résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 2,5$. Vérifier que les solutions trouvées par cette méthode sont cohérentes avec les solutions trouvées par méthodes graphique.

$f(x) = 2,5$ revient à $(x-3)(x+1,5) = 0$ : cette « équation produit nul » a deux solutions : 3 et -1,5, ce qui est cohérent avec les conjectures graphiques.

**d.** Résoudre l'inéquation : $(x-3)(x+1,5) > 0$

On utilise un tableau de signes :

| $x$ | -2,5 | | -1,5 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | − | | − | 0 | + | |
| $x+1,5$ | | − | 0 | + | | + | |
| $(x-3)(x+1,5)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Donc $(x-3)(x+1,5) > 0$ pour $x \in [-2,5\,;-1,5[\cup]3\,;\,4]$

**e.** (question hors barème) Interpréter graphiquement le résultat de l'inéquation précédente.

Cela signifie que la représentation graphique de la fonction $f$ sera « au-dessus » de la droite d'équation $y = 2,5$ sur les intervalles $[-2,5\,;-1,5[$ et $]3\,;\,4]$, ce qui est cohérent avec le graphique de la première question.

---

***Exercice* 5** : /4 points

1. Résoudre l'équation $-2x^2 + 7x - 3 = 0$

$\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 49 - 24 = 25$

On a donc deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{25}}{2 \times (-2)} = \dfrac{-7-5}{-4} = \dfrac{12}{4} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{25}}{2 \times (-2)} = \dfrac{-7+5}{-4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\,;\,3\right\}$

2. Résoudre l'inéquation $3x^2 - 4x + 2 > 0$.

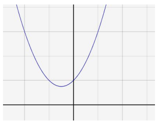
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 16 - 24 < 0$

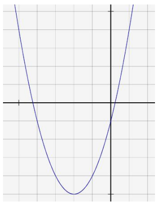
Le discriminant étant strictement négatif, le trinôme a un signe constant ; comme $a = 3 > 0$, il est toujours positif ; ainsi, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

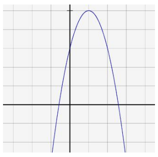
***Exercice* 6** : /2 points

Relier **lorsque cela est possible**, la fonction à sa représentation graphique.

**Les réponses seront justifiées** (une fois avec précision, le reste plus rapidement).

$f_1(x) = x^2 + x + 1$ : $\Delta < 0$ et $a > 0$ donc figure 

$f_2(x) = x^2 + 4x - 1$ : $\Delta > 0$ et $a > 0$ donc figure 

$f_3(x) = -2x^2 + 4x + 3$ : $\Delta > 0$ et $a < 0$ donc figure 

$f_4(x) = -2x^2 + 4x - 2$ : $\Delta = 0$ et $a < 0$ donc pas de figure correspondante

***Exercice* 7** : /2 points

En 1977, 26 crashs aériens ont été comptabilisés. En 2010, 27 ont été comptabilisés.

Diriez-vous qu'il est plus sûr de prendre l'avion aujourd'hui qu'en 1977 ? *(la réponse est à argumenter)*

Dans l'absolu, il y a eu un accident de plus en 2010 qu'en 1977 ; on pourrait penser qu'il est tout autant dangereux (ou pas plus sûr) de prendre l'avion l'avion aujourd'hui qu'en 1977.

Mais il faut prendre en compte que le fait que le trafic aérien a plus que doublé entre ces deux dates ! Comme le nombre de crashs est resté sensiblement le même, on peut dire qu'il est environ deux fois plus sûr de prendre l'avion aujourd'hui qu'en 1977.