Chapitre 6

Probabilités - Variable aléatoire

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire						
calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire						
utiliser un arbre pondéré						

I Variable aléatoire et loi de probabilité

définition 1 :

> Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule X, Y, Z, ...

Lorsque a_1, a_2, ... , a_n sont les valeurs prises par une variable aléatoire X, on note $(X = a_i)$ l'évènement « X prend la valeur a_i »(avec $1 \leq i \leq n$).

exemple :

On définit un jeu par la règle suivante :
« On lance un dé bien équilibré à 6 faces. On perd autant d'euros que le numéro sorti, sauf pour le 6 où on gagne 12 euros. »

* L'expérience aléatoire est le lancer du dé.

* Les évènements élémentaires sont les numéros de sortie du dé.

* A chaque numéro de sortie du dé, on associe selon la règle explicitée, un nombre :
- si le nombre 1 sort, on lui associe (-1) (puisqu'on perd 1€).
- si le nombre 6 sort, on lui associe 12 (puisqu'on gagne 12€).

On peut ainsi définir la variable aléatoire X qui correspond au *gain algébrique* (gain s'il est positif, perte s'il est négatif) lorsqu'on joue à ce jeu avec cette règle.

définition 2 :

> Lorsqu'à chaque valeur a_i (avec $1 \leq i \leq n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'évènement $(X = a_i)$, on dit qu'on a définit la **loi de probabilité de X**.

On peut présenter cette loi grâce à un tableau.
Notez que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Valeur de a_i	a_1	a_2	...	a_n
$p(X = a_i)$	p_1	p_2	...	p_n

exemple :

En reprenant l'exemple précédent, la loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le gain (algébrique) est donnée par le tableau suivant :

Gain	-1	-2	-3	-4	-5	12
$p(X = a_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

II Espérance mathématique

Considérons une variable aléatoire X qui prend les valeurs a_1, a_2, ... , a_n.

définition 3 :

L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = a_1 \times p(X = a_1) + a_2 \times p(X = a_2) + ... + a_n \times p(X = a_n)$$

remarque :

L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

exemple :

Dans le cas du jeu de dé, l'espérance est égale à :

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{6} + (-3) \times \frac{1}{6} + (-4) \times \frac{1}{6} + (-5) \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{6}$$

Cela donne : $E(X) = \dfrac{-15 + 12}{6} = -\dfrac{1}{2}$

L'espérance de ce jeu étant négative, cela signifie que si l'on y joue un grand nombre de fois, on est presque sûr de perdre de l'argent.
La règle du jeu est favorable à la personne qui organise le jeu.

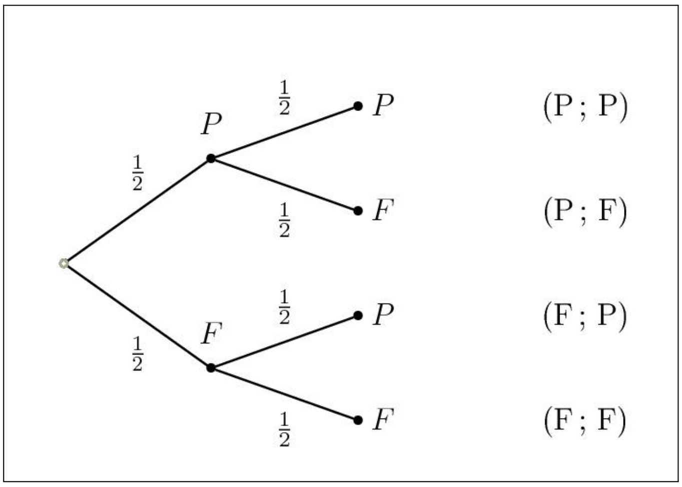
III Répétition d'expériences - Arbres pondérés

Il est commode de représenter une répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. On peut alors appliquer la **règle suivante** :

> La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

exemple :

On lance deux fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Cette situation peut être représentée par l'arbre pondéré ci-dessous, dans lequel P désigne l'évènement « obtenir PILE » et F l'évènement « obtenir FACE ».



On note X la variable aléatoire comptant le nombre de FACE observé à chaque série de deux lancers.

* $p(X = 0)$ est égale à la probabilité de n'obtenir aucun FACE c'est à dire $p((P, P))$.
Donc $p(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

De même, $p(X = 1) = p((F, P), (P, F)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$p(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

On représente la loi de probabilité de X dans le tableau ci-dessous :

Valeur a_i	0	1	2
$p(X = a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Il est facile de vérifier que $p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 1$

* $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$