Chapitre 3

Pourcentages

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
relier évolutions et pourcentages						
étudier des évolutions successives						
calculer le taux d'évolution réciproque						

I lien entre une évolution et un pourcentage

I - 1) définition et théorème

définition :

t désigne un nombre strictement positif.

Une grandeur passe de la valeur positive x_0 à la valeur positive x_1.

1. On dit que cette grandeur a **augmenté de $t\%$** si $x_1 = x_0 + \dfrac{t}{100}x_0$
2. On dit que cette grandeur a **diminué de $t\%$** si $x_1 = x_0 - \dfrac{t}{100}x_0$

exemples :

* Le litre de gasoil est à 1,28 €. Il augmente de 10%.
Son prix devient : $1,28 + \dfrac{10}{100} \times 1,28 = 1,28 + 0,128 = 1,408$ €

* Un pantalon coûtait 45 €avant des soldes.
Il est soldé à -20%. Il coûte après réduction : $45 - \dfrac{20}{100} \times 45 = 45 - 9 = 36$ €

théorème :

t désigne un nombre strictement positif.

1. En passant de la valeur positive x_0 à la valeur positive x_1, une grandeur a augmenté de $t\%$.
Alors :
$$\boxed{x_1 = (1 + \frac{t}{100})x_0} \text{ et } \boxed{\frac{t}{100} = \frac{x_1 - x_0}{x_0}}$$

2. En passant de la valeur positive x_0 à la valeur positive x_1, une grandeur a diminué de $t\%$.
Alors :
$$\boxed{x_1 = (1 - \frac{t}{100})x_0} \text{ et } \boxed{\frac{t}{100} = \frac{x_0 - x_1}{x_0}}$$

démonstration :

1. Par définition, on a : $x_1 = x_0 + \dfrac{t}{100}x_0$, donc $x_1 = (1 + \dfrac{t}{100})x_0$
Cette relation donne aussi : $\dfrac{t}{100}x_0 = x_1 - x_0$, c'est-à-dire : $\dfrac{t}{100} = \dfrac{x_1 - x_0}{x_0}$

2. Par définition, on a : $x_1 = x_0 - \dfrac{t}{100}x_0$, donc $x_1 = (1 - \dfrac{t}{100})x_0$
Cette relation donne aussi : $\dfrac{t}{100}x_0 = x_0 - x_1$, c'est-à-dire : $\dfrac{t}{100} = \dfrac{x_0 - x_1}{x_0}$

remarque :

L'égalité $\dfrac{t}{100} = \dfrac{x_1 - x_0}{x_0}$ permet de calculer t quand on connaît x_0 et x_1.

I - 2) méthode

a) méthode

le principe à retenir est le suivant :

$$\boxed{\text{Prix de départ} \times \text{Coefficient multiplicateur} = \text{Prix final}}$$

Dans les exercices, on donnera soit :

* **le prix de départ** et **l'augmentation/diminution** en pourcentage : **prix final** à trouver

* **le prix de départ** et **le prix final** : **augmentation/ diminution** en pourcentage à trouver

* **le prix final** et **l'augmentation/réduction** en pourcentage : **prix de départ** à trouver

b) coefficient multiplicateur

Il faut absolument être capable de passer à une augmentation / diminution exprimée en pourcentage au coefficient multiplicateur correspondant, et vice versa :

augmentation ou diminution (%)	coefficient multiplicateur
$+$ 25 %	$k = 1 + \frac{25}{100} = 1,25$
-2%	$k = 1 - \frac{2}{100} = 0,98$
c'est une hausse ; $1,55 - 1 = 55\%$	$k = 1,55$
c'est une baisse ; $1 - 0,47 = 53$ %	$k = 0,47$
c'est une hausse ; $3 - 1 = 2 = 200\%$	$k = 3$

c) exemples

exemple n°1 :

Prix de départ : 1,28 €; prix final : 1,402 €; quelle évolution ?

Il s'agit d'une hausse.

$$\boxed{\text{Prix de départ} \times \text{Coefficient multiplicateur} = \text{Prix final}}$$

Cela donne : $1,28 \times k = 1,402$, (en notant k le coefficient multiplicateur correspondant à cette hausse) ; ce qui revient à :
$k = \dfrac{1,402}{1,28} = 1,1$
Reste à faire le lien entre un coefficient multiplicateur et une évolution en pourcentage :
un coefficient multiplicateur de 1,1 correspond à une hausse de $1,1 - 1 = 0,1 = 10\%$.

exemple n°2 :

Prix final : 36 €; évolution : baisse de 20 %; quel prix initial ?

$$\boxed{\text{Prix de départ} \times \text{Coefficient multiplicateur} = \text{Prix final}}$$

Une baisse de 20 % donne un coefficient multiplicateur égal à : $1 - \dfrac{20}{100} = 0,8$
Cela donne : $x \times 0,8 = 36$, (en notant x le prix de départ recherché) ; ce qui revient à :
$x = \dfrac{36}{0,8} = 45$
Le prix avant la baisse était égal à 45 €.

II Évolutions successives

II - 1) méthode

Dans ce type de problème, on propose des évolutions exprimées en pourcentage les unes à la suite des autres.

On peut schématiser ainsi :

$$\boxed{\textbf{Prix de départ} \rightarrow \textit{évolution n°1} \rightarrow \textbf{Prix n°1} \rightarrow \textit{évolution n°2} \rightarrow \textbf{Prix n°2} \ldots}$$

Il suffira d'appliquer la méthode vue dans le paragraphe précédent plusieurs fois de suite.

II - 2) exemples

exemple n°1 :

De janvier à juin 2010, le prix d'un produit a augmenté de 20%, de juillet à décembre 2010, il a subi une nouvelle hausse de 30%. Ainsi, ce produit a subi deux hausses successives.

Le coefficient multiplicateur associé à la première hausse est égal à $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$

Le coefficient multiplicateur associé à la deuxième hausse est égal à $1 + \dfrac{30}{100} = 1,3$

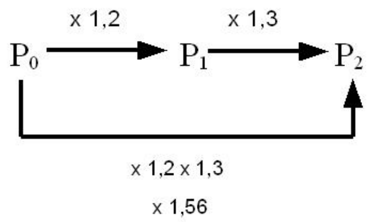
Si on note P_0 le prix en janvier 2010, P_1 le prix en juin 2010 et P_3 le prix en décembre 2010, on a :

$P_0 \times 1,2 = P_1$ et $P_1 \times 1,3 = P_2$

Ainsi, on obtient : $P_0 \times 1,2 \times 1,3 = P_2$, c'est-à-dire $P_0 \times 1,56 = P_2$

Pour passer du prix de janvier 2010 au prix de décembre 2010, on a un coefficient multiplicateur égal à 1,56, ce qui correspond à une hausse de 56%.

On peut résumer par le schéma suivant :



La conclusion de cet exercice est qu'une hausse de 20% suivie d'une hausse de 30% revient à une hausse de 56%.

exemple n°2 :

Une grandeur augmente de 50% puis baisse de 50%.

Le coefficient multiplicateur associé à la hausse est égal à $1 + \dfrac{50}{100} = 1,5$

Le coefficient multiplicateur associé à la baisse est égal à $1 - \dfrac{50}{100} = 0,5$

Le coefficient multiplicateur associé à la hausse suivie de la baisse est égal à : $1,5 \times 0,5 = 0,75$.

Ce coefficient multiplicateur correspond à une baisse de 25%.

Retenir : le coefficient multiplicateur $\boxed{1 + \dfrac{t}{100}}$ ou $\boxed{1 - \dfrac{t}{100}}$ est un outil efficace de résolution de problèmes de situations d'évolutions successives.

III Évolution réciproque

définition :

Une grandeur de valeur initiale x_0 non nulle augmente de $t\%$, notons x_1 sa nouvelle valeur.

Le pourcentage de baisse de x_1, pour que cette grandeur retrouve sa valeur initiale x_0 est appelé **pourcentage d'évolution réciproque**.

remarque : on définit de manière analogue le pourcentage d'évolution réciproque dans le cas d'une baisse de $t\%$.

exemple :

Une grandeur de valeur initiale x_0 non nulle subit une hausse de 50%. Notons x_1 sa nouvelle valeur et cherchons le pourcentage de baisse réciproque :

* pour passer de x_0 à x_1, on multiplie par $1 + \dfrac{50}{100} = 1,5$

* pour passer de x_1 à x_0, on divise donc par 1,5

* chercher à trouver l'évolution de x_1 à x_0, c'est chercher par combien on doit multiplier x_1 pour obtenir x_0

* or, diviser par 1,5 revient à multiplier par son inverse, c'est-à-dire par $\dfrac{1}{1,5} = \dfrac{2}{3} \approx 0,67$

* on a trouvé le coefficient multiplicatif permettant de passer de x_1 à x_0 : environ 0,67, ce qui correspond à une baisse de $1 - 0,67 = 0,33 = 33\%$

Conclusion : l'évolution réciproque d'une hausse de 50% est une baisse d'environ 33%.

hausse de 50%

$$x_0 \xrightarrow{\boxed{\times 1,5}} x_1$$

$$x_0 \xleftarrow[\boxed{\div 1,5}]{} x_1$$

ce qui revient à

$\boxed{\times 0,67}$

baisse d'environ 33%

IV Pourcentages d'évolution et indices

Le tableau ci-dessous donne le cours annuel d'un produit à New-York (en dollars par tonne) de janvier 2010 à mars 2010.

Mois	Janvier	Février	Mars
Cours	1598	1533	1662

Nous allons dresser un tableau permettant d'avoir rapidement le pourcentage d'évolution pour chaque mois par rapport au premier mois, c'est-à-dire janvier.

<u>Notion d'indice</u> :

On choisit comme mois de référence le mois de janvier et on ramène à 100 le cours de ce mois.
Reste à compléter ce tableau **en respectant les proportions**.

Mois	Janvier	Février	Mars
Cours	1598	1533	1662
Indice	100	96	104

D'après ce tableau, l'évolution entre Janvier et Février est une baisse de 4%.

L'évolution entre Janvier et Mars est une hausse de 4%.

remarques :

* Il n'est pas indispensable de mettre en place des indices pour déterminer des pourcentages d'évolution.

* L'utilisation d'un indice (presque toujours un indice 100 fixé à un moment donné) permet une lecture plus aisée du tableau, en donnant notamment par simple lecture **certains** pourcentages d'évolution.