

Chapitre 2

Études de fonction. Dérivation

Objectifs du chapitre :

<i>item</i>	<i>références</i>	<i>auto évaluation</i>				
calculer une dérivée						
construire une tangente à une courbe						
étudier les variations d'une fonction						

I Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

I - 1) sens de variation

propriété 1 :

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est **strictement croissante sur $[0; +\infty[$** .

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
f	0	$+\infty$

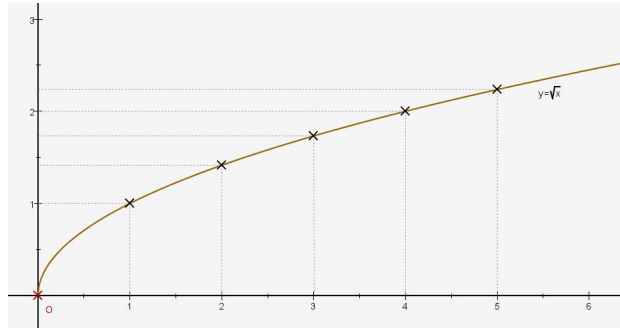
I - 2) tracé de courbe

Pour tracer la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, précisons quelques points de cette courbe.

Le tableau ci-dessous contient les coordonnées des points de la courbe d'abscisse : 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x) = \sqrt{x}$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$
valeur approchée			1,41	1,73		2,24

On relie ces points par une ligne continue et régulière.



II Fonction $x \mapsto x^3$

II - 1) sens de variation

propriété 2 :

La fonction $x \mapsto x^3$ est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

↗

II - 2) tracé de courbe

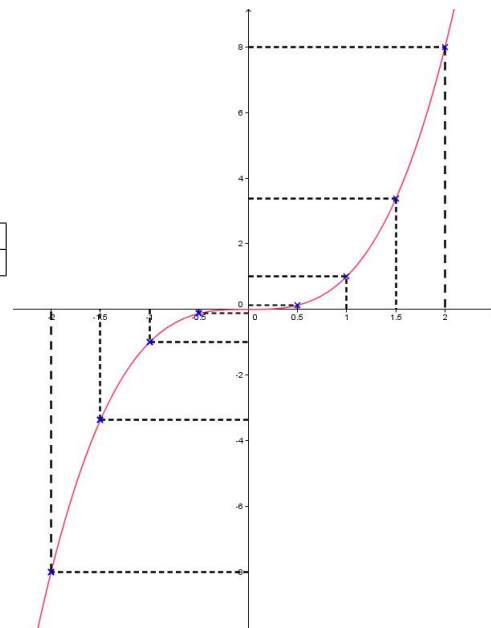
Pour tracer la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur $] -\infty ; +\infty[$, précisons quelques points de cette courbe.

Le tableau ci-dessous contient les coordonnées des points de la courbe d'abscisse : -2 ; -1,5 ; -1 ; -0,5 ; 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 et 2.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x) = x^3$	-8	-3,375	-1	-0,125	0	0,125	1	3,375	8

On relie ces points par une ligne continue et régulière.

remarque : les points d'abscisse -1 et 1 sont symétriques par rapport à O. Plus généralement, on peut démontrer que les points d'abscisses a et $-a$ sont symétriques par rapport à O. La courbe est donc symétrique par rapport à O.



III Nombre dérivé - Tangente

III - 1) taux de variation

définition 1 :

Le **taux de variation** de la fonction f définie entre a et b , avec $a \neq b$, est le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Avec $b = a + h$, $h \neq 0$, ce quotient s'écrit aussi $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

III - 2) interprétation graphique du taux de variation

Notons A le point de coordonnées $(a; f(a))$ et B le point de coordonnées $(a + h; f(a + h))$.

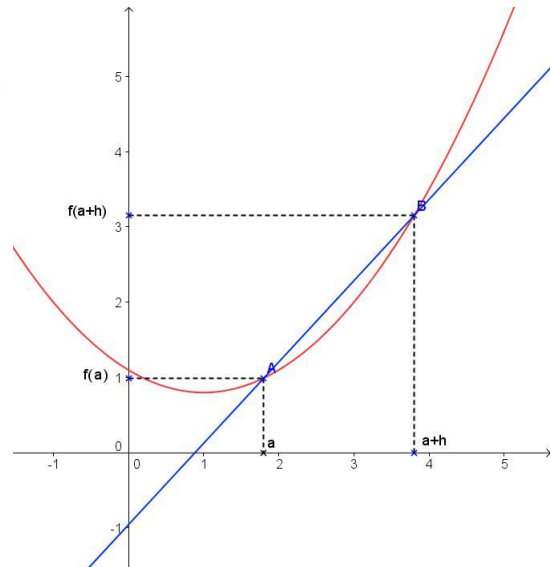
Nous savons que le coefficient directeur de la sécante (AB) est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, c'est-à-dire à $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

propriété 3 :

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentant une fonction f .

A est le point de coordonnées $(a; f(a))$ et B le point de coordonnées $(a + h; f(a + h))$.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est égal au coefficient directeur de la sécante (AB) .



III - 3) nombre dérivé

définition 2 :

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de zéro, avec $h \neq 0$, les nombres $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ deviennent de plus en plus proches d'un nombre fixé l .

Nous dirons alors que la fonction f est dérivable en a et que l est le nombre dérivé de f en a .

Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ et $a = 2$

Alors : $f(2 + h) = (2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$ et $f(2) = 2^2 = 4$

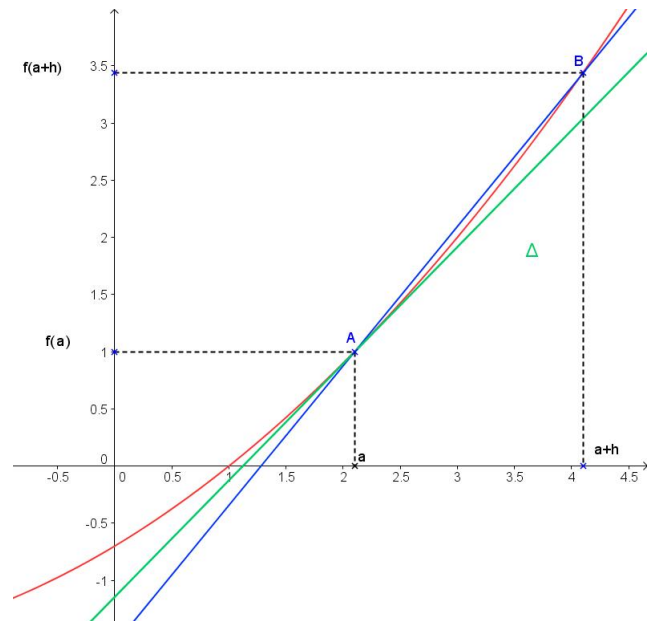
Donc $\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$ et $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$

III - 4) interprétation géométrique : tangente à une courbe

définition 3 :

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentant une fonction f .

La droite $\triangle$ qui passe par le point A et dont le coefficient directeur est $l = f'(a)$ est la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$



propriété 4 :

Si f est dérivable en a et de nombre dérivé $f'(a)$, l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

démonstration :

On sait que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est une droite qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ (d'après la définition 2).

Cette droite passe par ailleurs par le point de coordonnées $(a; f(a))$.

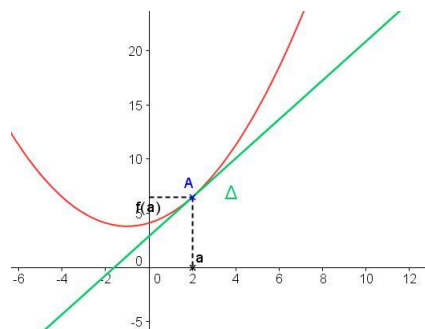
La droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ a pour coefficient directeur $f'(a)$; de plus, pour $x = a$, $y = f'(a)(a - a) + f(a) = f'(a) \times 0 + f(a) = f(a)$: cette droite passe effectivement par le point de coordonnées $(a; f(a))$: c'est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

exemple : cherchons l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse 2.

On a vu précédemment que $f'(2) = 4$

Par ailleurs, $f(2) = 2^2 = 4$

L'équation de la tangente est donc : $y = 4(x - 2) + 4$, c'est-à-dire : $y = 4x - 4$



IV Dérivées de fonctions usuelles

IV - 1) fonction dérivée

définition 4 :

f est une fonction en tout point x d'un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

Alors la fonction $x \mapsto f'(x)$, notée f' , est appelée **fonction dérivée de f sur I** .

exemple : reprenons la fonction $f : x \mapsto x^2$

On a déterminé dans un exemple précédent le nombre dérivé de f en 2 ; on a trouvé : $f'(2) = 4$

On peut déterminer si $f'(2, 5)$ et quelle est sa valeur :

Alors : $f(2, 5 + h) = (2, 5 + h)^2 = 6, 25 + 5h + h^2$ et $f(2) = 2, 5^2 = 6, 25$

Donc $\frac{f(2, 5 + h) - f(2, 5)}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = h + 5$ et $f'(2, 5) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 5) = 5$

On a donc déterminé deux valeurs de la fonction $f' : f'(2) = 4$ et $f'(2, 5) = 5$

On va à présent voir des techniques permettant de déterminer f sans avoir à l'évaluer point par point.

IV - 2) dérivée des fonctions usuelles

On considère une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ et f' sa fonction dérivée définie sur I .

On peut établir les formules de dérivation suivantes :

fonction f	$\mathcal{D}_f$	dérivée f'	I
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = kx$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \geq 2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, avec $n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

démonstration :

pour $f(x) = k$:

le taux de variation de f en a est $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$ et donc $f'(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

pour $f(x) = kx$:

le taux de variation de f en a est $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{ka + kh - ka}{h} = k$ et donc $f'(a) = k$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

pour $f(x) = \frac{1}{x}$:

le taux de variation de f en a ($a \neq 0$) est

$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - a - h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$ et donc $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$

les résultats sont admis pour les autres fonctions.

V Opérations

V - 1) dérivée de $u + v$

propriété 5 :

La somme $u + v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(u + v)' = u' + v'$$

démonstration :

On considère une valeur $a \in I$

Le taux de variation de la fonction $u + v$ entre a et $a + h$ est :

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ (c'est la définition même du nombre dérivé de u en a)

et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

On a donc : $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$, ce qui prouve la propriété 5.

exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ est la somme des deux fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$.

Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $u'(x) = 2x$; $v'(x) = 1$

Donc, pour tout réel x , $f'(x) = 2x + 1$

V - 2) dérivée de uv

propriété 6 :

Le produit uv de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

démonstration :

Cette propriété est admise.

exemple :

La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ est le produit des deux fonctions u et v définies par : $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc on peut dire que u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs : $u'(x) = 1$; $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

propriété 7 :

Le produit ku , où u est une fonction dérivable sur un intervalle I et k une constante, est une fonction dérivable sur I et :

$$(ku)'(x) = ku'(x)$$

démonstration :

Il suffit d'appliquer la propriété 6 dans le cas particulier où la fonction v est constante. La dérivée d'une fonction constante est zéro, donc : $(ku)'(x) = u'(x) \times k + u(x) \times 0$, d'où le résultat.

exemple :

Si $f(x) = 3x^2$, alors $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$

V - 3) dérivée de $\frac{u}{v}$

propriété 8 :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et **pour tout x de I , $v(x) \neq 0$** .

Dans ces conditions, le quotient $\frac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

démonstration :

Cette propriété est admise.

exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R} - 1$ par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ est le quotient des deux fonctions

u et v définies par : $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{1}{x-1}$

v ne s'annule sur aucun des intervalles $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

De plus, u et v sont dérivables sur ces intervalles et : $u'(x) = 1$; $v'(x) = 1$

Donc, pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - x \times 1}{(x-1)^2}$, d'où $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

V - 4) dérivée de $\frac{1}{v}$

propriété 9 :

v est une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que **pour tout x de I , $v(x) \neq 0$** .

Alors, la fonction $\frac{1}{v}$ est une fonction dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

démonstration :

Il suffit d'appliquer la propriété 8 dans le cas particulier où u est la fonction constante égale à 1.
Alors $u' = 0$.

exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est l'inverse de la fonction v définies par $v(x) = x^2 + 1$. Or, pour tout réel x , $v(x) \neq 0$.

On a $v'(x) = 2x$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

VI Relation entre dérivée et sens de variation

VI - 1) un exemple

Considérons la fonction $f \mapsto x^2 - 6x - 7$ et sa courbe représentative tracée ci-contre.

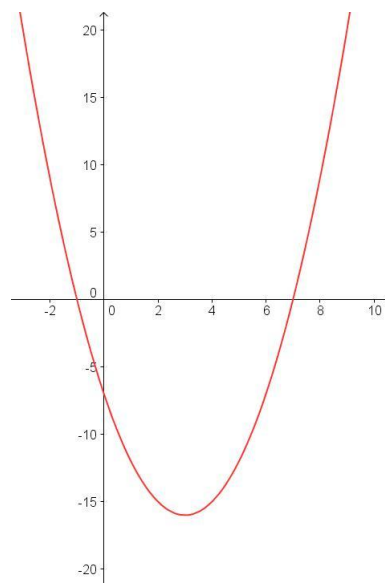
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 2x - 6$

* sur $] -\infty; 3]$, $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante

* sur $[3; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ et f est croissante

On peut résumer cela par le tableau suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de f'	—	0	+
variations de f	$+\infty$	$\searrow$ -16 $\nearrow$	$+\infty$



Cette relation entre le sens de variation de la fonction f et le signe de sa dérivée est un cas particulier du théorème général suivant.

VI - 2) théorème

théorème :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

* lorsque f' est positive sur I , f est croissante sur I .

* lorsque f' est négative sur I , f est décroissante sur I .

* lorsque f' est nulle sur I , f est constante sur I .

démonstration :

Ce théorème est admis.

VII Notions d'extremum et d'extremum local

VII - 1) extremum

définition 5 :

f est une fonction définie sur un intervalle I .

* dire que $f(a)$ est le **maximum de f sur I** signifie que

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) \leq f(a)$$

* dire que $f(a)$ est le **minimum de f sur I** signifie que

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) \geq f(a)$$

VII - 2) extremum local

définition 6 :

f est une fonction définie sur un intervalle I , et c est un élément de I distinct de ses extrémités.

* dire que f admet un **maximum local en c** signifie que pour tout $x \in I'$, où I' est un intervalle ouvert contenant c inclus dans I , $f(x) \leq f(c)$

* dire que f admet un **minimum local en c** signifie que pour tout $x \in I'$, où I' est un intervalle ouvert contenant c inclus dans I , $f(x) \geq f(c)$

VII - 3) un exemple

Considérons la fonction f définie sur $[-3; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

* A est le point « le plus bas » de la courbe.
Cela signifie que $f(2,5)$ est le minimum de f sur $[-3; 3]$

* B est le point « le plus haut » de la courbe.
Cela signifie que $f(0,5)$ est le maximum de f sur $[-3; 3]$

* la fonction f admet un minimum local en $(-1, 2)$. En effet, pour tous les nombres x d'un intervalle centré en $-1,2$ (par exemple $I' =]-1,5; -0,9[$), $f(x) \leq f(-1,2)$

* de même, la fonction f admet un maximum local en $-2,5$.

