Chapitre 1

Second degré

Objectifs du chapitre :

item	*références*
résoudre une inéquation du second degré	
résoudre une inéquation du second degré	

I Équations du second degré

I - 1) vocabulaire et définition

définition 1 :

* Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

où a, b et c sont des réels donnés, avec $a \neq 0$

* $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ est appelé **trinôme**.

exemples :

* $3x^2 - 7x + 2 = 0$; ici : $a = 3$, $b = -7$ et $c = 2$

* $2x^2 - 9 = 0$; ici : $a = 2$, $b = 0$ et $c = -9$

* $-x^2 + 2x = 0$; ici : $a = -1$, $b = 2$ et $c = 0$

* l'équation $x^2 - 4 + 3x = 2x^2 - x$ peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
En effet, $x^2 - 4 + 3x = 2x^2 - x$ équivaut à $x^2 - 4 + 3x - (2x^2 - x) = 0$,
c'est-à-dire à : $-x^2 + 4x - 4 = 0$.
Donc ici, $a = -1$, $b = 4$ et $c = -4$

I - 2) forme canonique du trinôme

propriété :

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$; alors, si $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

démonstration :

Dans ce type de démonstration, on part souvent de l'expression qui semble la plus complexe pour montrer qu'elle est égale à l'autre expression.

Ici, cela donne :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
$$=a\left[\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$
$$=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right)$$
$$=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)$$
$$=ax^2+bx+c$$

définition 2 :

L'expression $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est appelée **forme canonique** du trinôme ax^2+bx+c.

I - 3) résolution

définition 3 :

Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec $a\neq 0$ sont appelées **racines** du trinôme ax^2+bx+c.

théorème :

Résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

* lorsque $\Delta<0$; l'équation n'a pas de solution.

* lorsque $\Delta=0$, l'équation a une solution $-\frac{b}{2a}$ (dite racine double).

* lorsque $\Delta>0$, l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

démonstration :

On utilise la forme canonique du trinôme.

$ax^2+bx+c=0$ équivaut à $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0$,

c'est-à-dire à $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$,

c'est-à-dire en posant $X=x+\dfrac{b}{2a}$, à $X^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$ (E)

* si $\Delta<0$, alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$
L'équation (E) n'a pas de solution, car X^2 est toujours positif.

* si $\Delta=0$, l'équation (E) s'écrit $X^2=0$
Cette équation admet une seule solution, $X=0$,
c'est-à-dire $x+\dfrac{b}{2a}=0$, c'est-à-dire encore $x=-\dfrac{b}{2a}$

* si $\Delta>0$, l'équation (E) admet deux solution : $X_1=\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$ et $X_2=-\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$,

c'est-à-dire $X_1=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a^2}}$ et $X_2=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a^2}}$

- si $a>0$, alors $\sqrt{a^2}=a$; donc les deux solutions sont $X_1=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

  c'est-à-dire $x_1+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$
  Donc l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions :
  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $a<0$, alors $\sqrt{a^2}=-a$

  On obtient de manière analogue deux solutions : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

remarque :

En faisant $\Delta=0$ dans l'expression de x_1 ou x_2, on obtient l'expression de la racine double $-\dfrac{b}{2a}$

définition 4 :

Le nombre b^2-4ac est appelé **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c

exemple :

Résolution de l'équation $3x^2-x-4=0$

Ici, $a=3$, $b=-1$ et $c=-4$;
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times3\times(-4)=1+48=49$, donc $\Delta>0$
L'équation admet deux solutions :

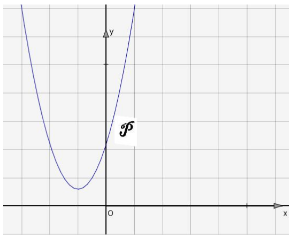
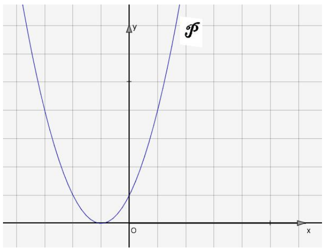
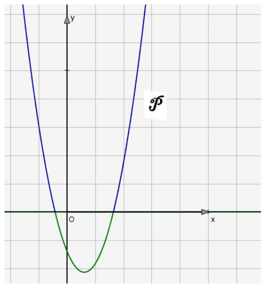
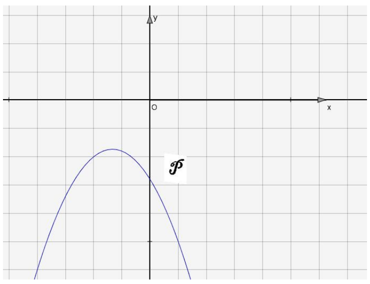
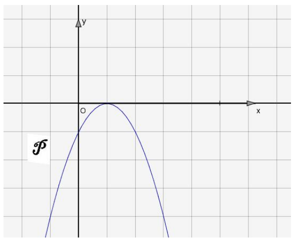
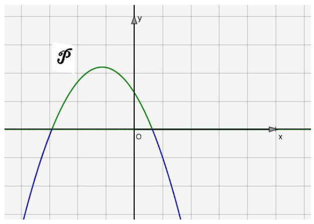
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-7}{6}=\frac{-6}{6}=-1 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-1;\dfrac{4}{3}\right\}$

II Inéquations du second degré

II - 1) courbe représentative d'un trinôme du second degré

La parabole $\mathcal{P}$ représente la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Elle est orientée vers le haut si a est strictement positif.
Elle est orientée vers le bas si a est strictement négatif.
On peut préciser les différentes allures de $\mathcal{P}$ selon le signe du discriminant Δ et de a :

	$\Delta < 0$ pas de racine $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses	$\Delta = 0$ une seule racine $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point	$\Delta > 0$ deux racines $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points
$a > 0$ $\mathcal{P}$ orientée vers le haut			
$a < 0$ $\mathcal{P}$ orientée vers le bas			

II - 2) forme factorisée d'un trinôme du second degré

propriété :

On considère un trinôme $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, et Δ son discriminant.

* si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de forme factorisée

* si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, avec $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ *(x_0 est racine double du trinôme)*

* si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *(x_1 et x_2 sont les racines du trinôme)*

démonstration :

* <u>si $\Delta < 0$</u>,
si le trinôme avait une forme factorisée, il serait de la forme : $\alpha(x-\beta)(x-\gamma)$ ce qui signifierait qu'il aurait deux racines (éventuellement égales) : β et γ, ce qui est exclu (dans le cas $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine).

* <u>si $\Delta = 0$</u>,
en notant x_0 la racine double du trinôme :
$a(x-x_0)^2$
$= a\left(x-(-\frac{b}{2a})\right)^2$
$= a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)$
$= a\left(x^2+\frac{x}{a}+\frac{4ac}{4a^2}\right)$ *(en remarquant que $\Delta = 0$ revient à dire $b^2 = 4ac$)*
$= ax^2+bx+c$

* <u>si $\Delta > 0$</u>,
en notant x_1 et x_2 les racines du trinôme :

$a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)$

On va chercher à évaluer (x_1+x_2) (la somme des racines) et x_1x_2 (le produit des racines) :

* $x_1+x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

* $x_1x_2 = \dfrac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \dfrac{(b+\sqrt{\Delta})(b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \dfrac{b^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$
$= \dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Alors :
$a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2) = a\left(x^2-\left(-\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}\right) = ax^2+bx+c$

exemples :

<u>Factorisation du trinôme $3x^2-x-4$</u>

On a vu que ce trinôme avait deux racines : -1 et $\dfrac{4}{3}$

D'après ce qui précède, $3x^2-x-4 = 3\,(x-(-1))\left(x-\dfrac{4}{3}\right)$

On peut facilement vérifier que :
$3\,(x-(-1))\left(x-\dfrac{4}{3}\right) = (x+1)(3x-4) = 3x^2-4x+3x-4 = 3x^2-x-4$

<u>Factorisation du trinôme $x^2-10x+25$</u>

$\Delta = (-10)^2-4\times1\times25 = 100-100 = 0$; une racine double : $x_0 = -\dfrac{-10}{2\times1} = 5$
On a donc : $x^2-10x+25 = (x-5)^2$ (ce qui est évident après coup !)

II - 3) signe d'un trinôme

théorème :

On considère un trinôme $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, et Δ son discriminant.

si $\Delta < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe du trinôme	signe de a

si $\Delta = 0$ *On note x_0 la racine double du trinôme.*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $(x - x_0)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $a(x - x_0)^2$		signe de a	0	signe de a	

si $\Delta > 0$ *On note x_1 et x_2 les racines du trinôme, avec $x_1 < x_2$*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $(x - x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x - x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

démonstration :

* si $\Delta < 0$,
Le trinôme ne s'annule jamais puisqu'il n'a pas de racine. Il a donc un signe constant.
Evaluons le trinôme en 0 : $ax^2 + bx + c = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$
Or, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, ce qui veut dire que $4ac > b^2$, donc que le produit ac est positif ou nul.
Si ce produit était nul, cela voudrait dire que $c = 0$ (puisqu'on a supposé que $a \neq 0$).
Le trinôme s'écrirait : $ax^2 + bx$ et aurait 0 comme racine, ce qui est exclu.
Le produit ac est donc strictement positif, ce qui signifie que a et c ont le même signe.
Ainsi, dans ce cas, le trinôme a un signe constant : celui de c qui est aussi celui de a.

* si $\Delta = 0$,
On a dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, ce qui montre que le trinôme est bien du même signe que a puisque $(x - x_0)^2$ est lui strictement positif pour toutes les valeurs de x, sauf en x_0 où il est égal à 0.

* si $\Delta > 0$,
On a dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
On peut mettre en place le **tableau de signes** présenté dans le théorème.

remarques :

* déterminer le signe d'un trinôme permet de résoudre **une inéquation du second degré**.

* il faut faire le lien entre les **représentations graphiques** du paragraphe II-1) et la propriété indiquant le **signe d'un trinôme**.