

Cours de mathématiques de la classe de 1^{ère} ES / L

Florent GIROD ¹

Septembre 2011

1. Professeur de mathématiques à l'Externat Notre Dame - Grenoble

Table des matières

1	Second degré	2
2	Etudes de fonction. Dérivation	8
3	Pourcentages	18
4	Suites	24
5	Statistiques	33
6	Probabilités - Variable aléatoire	36
7	Loi binomiale. Échantillonnage	39

Chapitre 1

Second degré

I Equations du second degré

I - 1) vocabulaire et définition

définition 1 :

* Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a , b et c sont des réels donnés, avec $a \neq 0$

* $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ est appelé **trinôme**.

exemples :

* $3x^2 - 7x + 2 = 0$; ici : $a = 3$, $b = -7$ et $c = 2$

* $2x^2 - 9 = 0$; ici : $a = 2$, $b = 0$ et $c = -9$

* $-x^2 + 2x = 0$; ici : $a = -1$, $b = 2$ et $c = 0$

* l'équation $x^2 - 4 + 3x = 2x^2 - x$ peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

En effet, $x^2 - 4 + 3x = 2x^2 - x$ équivaut à $x^2 - 4 + 3x - (2x^2 - x) = 0$,

c'est-à-dire à : $-x^2 + 4x - 4 = 0$.

Donc ici, $a = -1$, $b = 4$ et $c = -4$

I - 2) forme canonique du trinôme

propriété :

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$; alors, si $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

démonstration :

Dans ce type de démonstration, on part souvent de l'expression qui semble la plus complexe pour montrer qu'elle est égale à l'autre expression.

Ici, cela donne :

$$\begin{aligned} & a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

définition 2 :

L'expression $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ est appelée **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

I - 3) résolution

définition 3 :

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$ sont appelées **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

théorème :

Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

* lorsque $\Delta < 0$; l'équation n'a pas de solution.

* lorsque $\Delta = 0$, l'équation a une solution $-\frac{b}{2a}$ (dite racine double).

* lorsque $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

démonstration :

On utilise la forme canonique du trinôme.

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ équivaut à } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0,$$

$$\text{c'est-à-dire à } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

$$\text{c'est-à-dire en posant } X = x + \frac{b}{2a}, \text{ à } X^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \text{ (E)}$$

$$* \text{ si } \Delta < 0, \text{ alors } \frac{\Delta}{4a^2} < 0$$

L'équation (E) n'a pas de solution, car X^2 est toujours positif.

$$* \text{ si } \Delta = 0, \text{ l'équation (E) s'écrit } X^2 = 0$$

Cette équation admet une seule solution, $X = 0$,

$$\text{c'est-à-dire } x + \frac{b}{2a} = 0, \text{ c'est-à-dire encore } x = -\frac{b}{2a}$$

$$* \text{ si } \Delta > 0, \text{ l'équation (E) admet deux solutions : } X_1 = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ et } X_2 = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}},$$

$$\text{c'est-à-dire } X_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a^2}} \text{ et } X_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a^2}}$$

$$- \text{ si } a > 0, \text{ alors } \sqrt{a^2} = a; \text{ donc les deux solutions sont } X_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } X_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{c'est-à-dire } x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$- \text{ si } a < 0, \text{ alors } \sqrt{a^2} = -a$$

$$\text{On obtient de manière analogue deux solutions : } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

remarque :

En faisant $\Delta = 0$ dans l'expression de x_1 ou x_2 , on obtient l'expression de la racine double $-\frac{b}{2a}$

définition 4 :

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$

exemple :

Résolution de l'équation $3x^2 - x - 4 = 0$

Ici, $a = 3$, $b = -1$ et $c = -4$;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 1 + 48 = 49, \text{ donc } \Delta > 0$$

L'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 7}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 7}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{4}{3} \right\}$$

II Inéquations du second degré

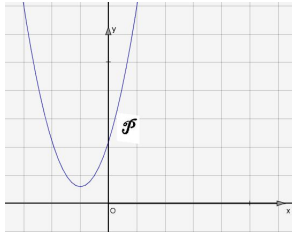
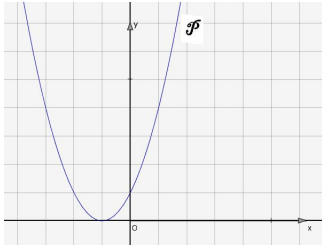
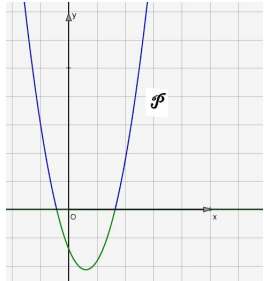
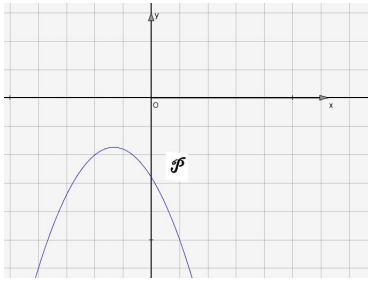
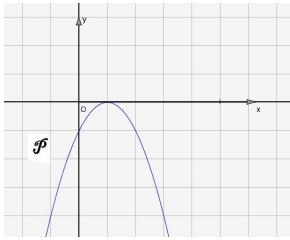
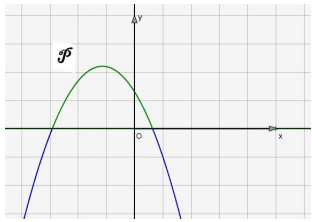
II - 1) courbe représentative d'un trinôme du second degré

La parabole $\mathcal{P}$ représente la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Elle est orientée vers le haut si a est strictement positif.

Elle est orientée vers le bas si a est strictement négatif.

On peut préciser les différentes allures de $\mathcal{P}$ selon le signe du discriminant Δ et de a :

	$\Delta < 0$ pas de racine $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses	$\Delta = 0$ une seule racine $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point	$\Delta > 0$ deux racines $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points
$a > 0$ $\mathcal{P}$ orientée vers le haut			
$a < 0$ $\mathcal{P}$ orientée vers le bas			

II - 2) forme factorisée d'un trinôme du second degré

propriété :

On considère un trinôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), et Δ son discriminant.

* si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de forme factorisée

* si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (x_0 est racine double du trinôme)

* si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ (x_1 et x_2 sont les racines du trinôme)

démonstration :

* si $\Delta < 0$,

si le trinôme avait une forme factorisée, il serait de la forme : $\alpha(x - \beta)(x - \gamma)$ ce qui signifierait qu'il aurait deux racines (éventuellement égales) : β et γ , ce qui est exclu (dans le cas $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine).

* si $\Delta = 0$,

en notant x_0 la racine double du trinôme :

$$\begin{aligned} & a(x - x_0)^2 \\ &= a \left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2 \\ &= a \left(x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left(x^2 + \frac{x}{a} + \frac{4ac}{4a^2} \right) \quad (\text{en remarquant que } \Delta = 0 \text{ revient à dire } b^2 = 4ac) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

* si $\Delta > 0$,

en notant x_1 et x_2 les racines du trinôme :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$$

On va chercher à évaluer $(x_1 + x_2)$ (la somme des racines) et x_1x_2 (le produit des racines) :

$$* x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} * x_1x_2 &= \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(b + \sqrt{\Delta})(b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Alors :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a \left(x^2 - \left(-\frac{b}{a} \right) x + \frac{c}{a} \right) = ax^2 + bx + c$$

exemples :

Factorisation du trinôme $3x^2 - x - 4$

On a vu que ce trinôme avait deux racines : -1 et $\frac{4}{3}$

$$\text{D'après ce qui précède, } 3x^2 - x - 4 = 3(x - (-1)) \left(x - \frac{4}{3} \right)$$

On peut facilement vérifier que :

$$3(x - (-1)) \left(x - \frac{4}{3} \right) = (x + 1)(3x - 4) = 3x^2 - 4x + 3x - 4 = 3x^2 - x - 4$$

Factorisation du trinôme $x^2 - 10x + 25$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 100 - 100 = 0 ; \text{ une racine double : } x_0 = -\frac{-10}{2 \times 1} = 5$$

On a donc : $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$ (ce qui est évident après coup !)

II - 3) signe d'un trinôme

théorème :

On considère un trinôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), et Δ son discriminant.

si $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe du trinôme	signe de a	

si $\Delta = 0$ On note x_0 la racine double du trinôme.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $(x - x_0)^2$	+	0	+
signe de $a(x - x_0)^2$	signe de a		

si $\Delta > 0$ On note x_1 et x_2 les racines du trinôme, avec $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
signe de $(x - x_1)$	—	0	+	+
signe de $(x - x_2)$	—	—	0	+
signe de $(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	—	+
signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$	signe de a			

démonstration :

* si $\Delta < 0$,

Le trinôme ne s'annule jamais puisqu'il n'a pas de racine. Il a donc un signe constant.

Evaluons le trinôme en 0 : $ax^2 + bx + c = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$

Or, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, ce qui veut dire que $4ac > b^2$, donc que le produit ac est positif ou nul.

Si ce produit était nul, cela voudrait dire que $c = 0$ (puisque on a supposé que $a \neq 0$).

Le trinôme s'écrit : $ax^2 + bx$ et aurait 0 comme racine, ce qui est exclu.

Le produit ac est donc strictement positif, ce qui signifie que a et c ont le même signe.

Ainsi, dans ce cas, le trinôme a un signe constant : celui de c qui est aussi celui de a .

* si $\Delta = 0$,

On a dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, ce qui montre que le trinôme est bien du même signe que a puisque $(x - x_0)^2$ est lui strictement positif pour toutes les valeurs de x , sauf en x_0 où il est égal à 0.

* si $\Delta > 0$,

On a dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

On peut mettre en place le **tableau de signes** présenté dans le théorème.

remarques :

* déterminer le signe d'un trinôme permet de résoudre **une inéquation du second degré**.

* il faut faire le lien entre les **représentations graphiques** du paragraphe II-1) et la propriété indiquant le **signe d'un trinôme**.

Chapitre 2

Etudes de fonction. Dérivation

I Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

I - 1) sens de variation

propriété 1 :

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est **strictement croissante sur $[0; +\infty[$** .

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
f	0	$+\infty$

↗

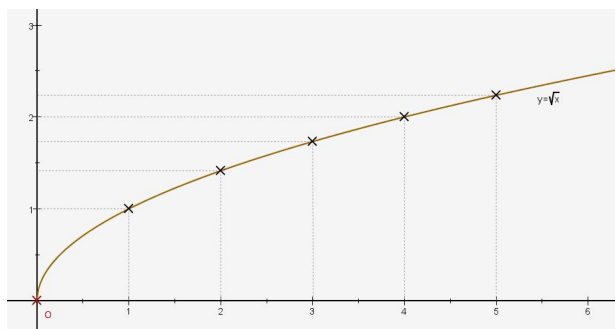
I - 2) tracé de courbe

Pour tracer la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, précisons quelques points de cette courbe.

Le tableau ci-dessous contient les coordonnées des points de la courbe d'abscisse : 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x) = \sqrt{x}$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$
valeur approchée			1,41	1,73		2,24

On relie ces points par une ligne continue et régulière.



II Fonction $x \mapsto x^3$

II - 1) sens de variation

propriété 2 :

La fonction $x \mapsto x^3$ est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

↗

II - 2) tracé de courbe

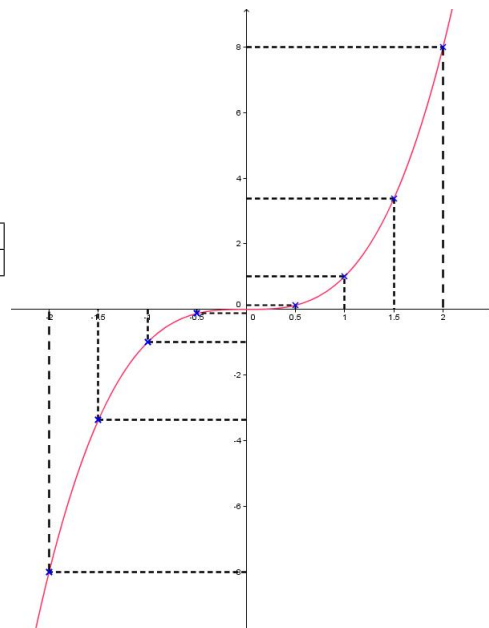
Pour tracer la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur $] -\infty ; +\infty[$, précisons quelques points de cette courbe.

Le tableau ci-dessous contient les coordonnées des points de la courbe d'abscisse : -2 ; -1,5 ; -1 ; -0,5 ; 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 et 2.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x) = x^3$	-8	-3,375	-1	-0,125	0	0,125	1	3,375	8

On relie ces points par une ligne continue et régulière.

remarque : les points d'abscisse -1 et 1 sont symétriques par rapport à O. Plus généralement, on peut démontrer que les points d'abscisses a et $-a$ sont symétriques par rapport à O. La courbe est donc symétrique par rapport à O.



III Nombre dérivé - Tangente

III - 1) taux de variation

définition 1 :

Le **taux de variation** de la fonction f définie entre a et b , avec $a \neq b$, est le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Avec $b = a + h$, $h \neq 0$, ce quotient s'écrit aussi $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

III - 2) interprétation graphique du taux de variation

Notons A le point de coordonnées $(a; f(a))$ et B le point de coordonnées $(a + h; f(a + h))$.

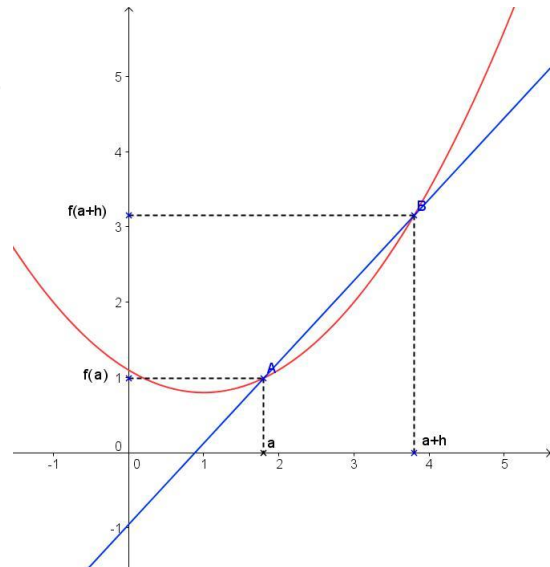
Nous savons que le coefficient directeur de la sécante (AB) est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, c'est-à-dire à $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

propriété 3 :

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentant une fonction f .

A est le point de coordonnées $(a; f(a))$ et B le point de coordonnées $(a + h; f(a + h))$.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est égal au coefficient directeur de la sécante (AB) .



III - 3) nombre dérivé

définition 2 :

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de zéro, avec $h \neq 0$, les nombres $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ deviennent de plus en plus proches d'un nombre fixé l .

Nous dirons alors que la fonction f est dérivable en a et que l est le nombre dérivé de f en a .

Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ et $a = 2$

Alors : $f(2 + h) = (2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$ et $f(2) = 2^2 = 4$

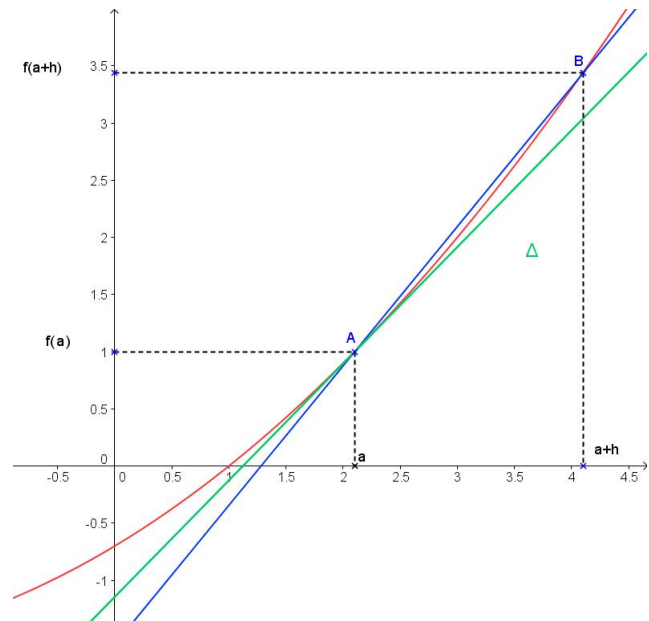
Donc $\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$ et $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$

III - 4) interprétation géométrique : tangente à une courbe

définition 3 :

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentant une fonction f .

La droite $\triangle$ qui passe par le point A et dont le coefficient directeur est $l = f'(a)$ est la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$



propriété 4 :

Si f est dérivable en a et de nombre dérivé $f'(a)$, l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

démonstration :

On sait que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est une droite qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ (d'après la définition 2).

Cette droite passe par ailleurs par le point de coordonnées $(a; f(a))$.

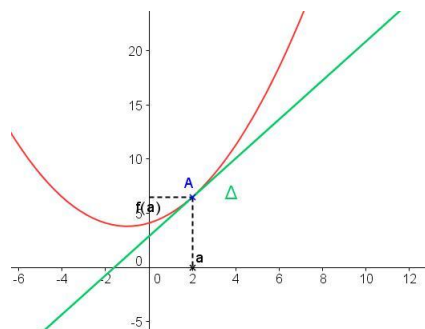
La droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ a pour coefficient directeur $f'(a)$; de plus, pour $x = a$, $y = f'(a)(a - a) + f(a) = f'(a) \times 0 + f(a) = f(a)$: cette droite passe effectivement par le point de coordonnées $(a; f(a))$: c'est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

exemple : cherchons l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse 2.

On a vu précédemment que $f'(2) = 4$

Par ailleurs, $f(2) = 2^2 = 4$

L'équation de la tangente est donc : $y = 4(x - 2) + 4$, c'est-à-dire : $y = 4x - 4$



IV Dérivées de fonctions usuelles

IV - 1) fonction dérivée

définition 4 :

f est une fonction en tout point x d'un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

Alors la fonction $x \mapsto f'(x)$, notée f' , est appelée **fonction dérivée de f sur I** .

exemple : reprenons la fonction $f : x \mapsto x^2$

On a déterminé dans un exemple précédent le nombre dérivé de f en 2 ; on a trouvé : $f'(2) = 4$

On peut déterminer si $f'(2, 5)$ et quelle est sa valeur :

Alors : $f(2, 5 + h) = (2, 5 + h)^2 = 6, 25 + 5h + h^2$ et $f(2) = 2, 5^2 = 6, 25$

Donc $\frac{f(2, 5 + h) - f(2, 5)}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = h + 5$ et $f'(2, 5) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 5) = 5$

On a donc déterminé deux valeurs de la fonction $f' : f'(2) = 4$ et $f'(2, 5) = 5$

On va à présent voir des techniques permettant de déterminer f sans avoir à l'évaluer point par point.

IV - 2) dérivée des fonctions usuelles

On considère une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ et f' sa fonction dérivée définie sur I .

On peut établir les formules de dérivation suivantes :

fonction f	$\mathcal{D}_f$	dérivée f'	I
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = kx$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \geq 2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, avec $n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$, avec $n \geq 1$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

démonstration :

pour $f(x) = k$:

le taux de variation de f en a est $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$ et donc $f'(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

pour $f(x) = kx$:

le taux de variation de f en a est $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{ka + kh - ka}{h} = k$ et donc $f'(a) = k$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

pour $f(x) = \frac{1}{x}$:

le taux de variation de f en a ($a \neq 0$) est

$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - a - h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$ et donc $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$

les résultats sont admis pour les autres fonctions.

V Opérations

V - 1) dérivée de $u + v$

propriété 5 :

La somme $u + v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(u + v)' = u' + v'$$

démonstration :

On considère une valeur $a \in I$

Le taux de variation de la fonction $u + v$ entre a et $a + h$ est :

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ (c'est la définition même du nombre dérivé de u en a)

et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

On a donc : $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$, ce qui prouve la propriété 5.

exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ est la somme des deux fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$.

Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $u'(x) = 2x$; $v'(x) = 1$

Donc, pour tout réel x , $f'(x) = 2x + 1$

V - 2) dérivée de uv

propriété 6 :

Le produit uv de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

démonstration :

Cette propriété est admise.

exemple :

La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ est le produit des deux fonctions u et v définies par : $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc on peut dire que u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs : $u'(x) = 1$; $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

propriété 7 :

Le produit ku , où u est une fonction dérivable sur un intervalle I et k une constante, est une fonction dérivable sur I et :

$$(ku)'(x) = ku'(x)$$

démonstration :

Il suffit d'appliquer la propriété 6 dans le cas particulier où la fonction v est constante. La dérivée d'une fonction constante est zéro, donc : $(ku)'(x) = u'(x) \times k + u(x) \times 0$, d'où le résultat.

exemple :

Si $f(x) = 3x^2$, alors $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$

V - 3) dérivée de $\frac{u}{v}$

propriété 8 :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et **pour tout x de I , $v(x) \neq 0$** .

Dans ces conditions, le quotient $\frac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

démonstration :

Cette propriété est admise.

exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R} - 1$ par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ est le quotient des deux fonctions

u et v définies par : $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{1}{x-1}$

v ne s'annule sur aucun des intervalles $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.

De plus, u et v sont dérivables sur ces intervalles et : $u'(x) = 1$; $v'(x) = 1$

Donc, pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - x \times 1}{(x-1)^2}$, d'où $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

V - 4) dérivée de $\frac{1}{v}$

propriété 9 :

v est une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que **pour tout x de I , $v(x) \neq 0$** .

Alors, la fonction $\frac{1}{v}$ est une fonction dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

démonstration :

Il suffit d'appliquer la propriété 8 dans le cas particulier où u est la fonction constante égale à 1.
Alors $u' = 0$.

exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est l'inverse de la fonction v définies par $v(x) = x^2 + 1$. Or, pour tout réel x , $v(x) \neq 0$.

On a $v'(x) = 2x$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

VI Relation entre dérivée et sens de variation

VI - 1) un exemple

Considérons la fonction $f \mapsto x^2 - 6x - 7$ et sa courbe représentative tracée ci-contre.

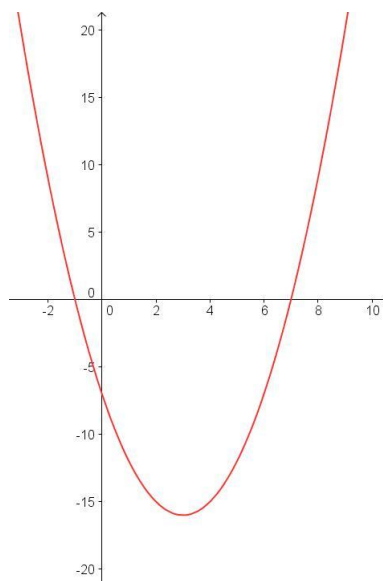
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 2x - 6$

* sur $] -\infty; 3]$, $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante

* sur $[3; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ et f est croissante

On peut résumer cela par le tableau suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de f'	—	0	+
variations de f	$+\infty$	$\searrow$ -16 $\nearrow$	$+\infty$



Cette relation entre le sens de variation de la fonction f et le signe de sa dérivée est un cas particulier du théorème général suivant.

VI - 2) théorème

théorème :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

* lorsque f' est positive sur I , f est croissante sur I .

* lorsque f' est négative sur I , f est décroissante sur I .

* lorsque f' est nulle sur I , f est constante sur I .

démonstration :

Ce théorème est admis.

VII Notions d'extremum et d'extremum local

VII - 1) extremum

définition 5 :

f est une fonction définie sur un intervalle I .

* dire que $f(a)$ est le **maximum de f sur I** signifie que

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) \leq f(a)$$

* dire que $f(a)$ est le **minimum de f sur I** signifie que

$$\text{pour tout } x \in I, f(x) \geq f(a)$$

VII - 2) extremum local

définition 6 :

f est une fonction définie sur un intervalle I , et c est un élément de I distinct de ses extrémités.

* dire que f admet un **maximum local en c** signifie que pour tout $x \in I'$, où I' est un intervalle ouvert contenant c inclus dans I , $f(x) \leq f(c)$

* dire que f admet un **minimum local en c** signifie que pour tout $x \in I'$, où I' est un intervalle ouvert contenant c inclus dans I , $f(x) \geq f(c)$

VII - 3) un exemple

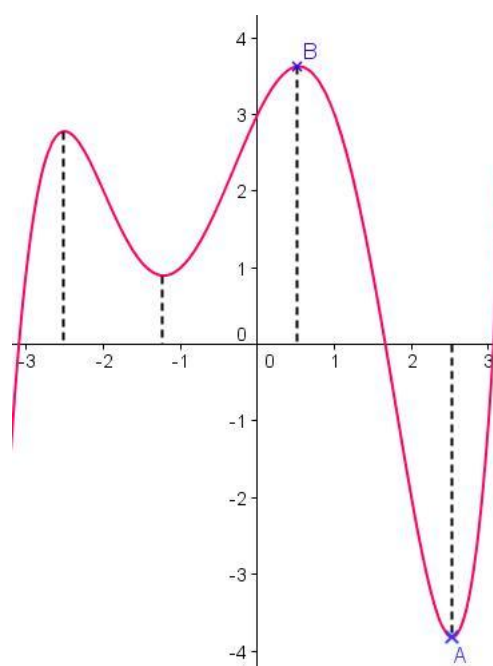
Considérons la fonction f définie sur $[-3; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

* A est le point « le plus bas » de la courbe.
Cela signifie que $f(2,5)$ est le minimum de f sur $[-3; 3]$

* B est le point « le plus haut » de la courbe.
Cela signifie que $f(0,5)$ est le maximum de f sur $[-3; 3]$

* la fonction f admet un minimum local en $(-1,2)$. En effet, pour tous les nombres x d'un intervalle centré en $-1,2$ (par exemple $I' =]-1,5; -0,9[$), $f(x) \geq f(-1,2)$

* de même, la fonction f admet un maximum local en $-2,5$.



Chapitre 3

Pourcentages

I lien entre une évolution et un pourcentage

I - 1) définition et théorème

définition :

t désigne un nombre strictement positif.

Une grandeur passe de la valeur positive x_0 à la valeur positive x_1 .

1. On dit que cette grandeur a **augmenté de $t\%$** si $x_1 = x_0 + \frac{t}{100}x_0$
2. On dit que cette grandeur a **diminué de $t\%$** si $x_1 = x_0 - \frac{t}{100}x_0$

exemples :

* Le litre de gasoil est à 1,28 €. Il augmente de 10%.

Son prix devient : $1,28 + \frac{10}{100} \times 1,28 = 1,28 + 0,128 = 1,408$ €

* Un pantalon coûtait 45 € avant des soldes.

Il est soldé à -20%. Il coûte après réduction : $45 - \frac{20}{100} \times 45 = 45 - 9 = 36$ €

théorème :

t désigne un nombre strictement positif.

1. En passant de la valeur positive x_0 à la valeur positive x_1 , une grandeur a augmenté de $t\%$.

Alors :

$$x_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right)x_0 \quad \text{et} \quad \frac{t}{100} = \frac{x_1 - x_0}{x_0}$$

2. En passant de la valeur positive x_0 à la valeur positive x_1 , une grandeur a diminué de $t\%$.

Alors :

$$x_1 = \left(1 - \frac{t}{100}\right)x_0 \quad \text{et} \quad \frac{t}{100} = \frac{x_0 - x_1}{x_0}$$

démonstration :

1. Par définition, on a : $x_1 = x_0 + \frac{t}{100}x_0$, donc $x_1 = (1 + \frac{t}{100})x_0$
Cette relation donne aussi : $\frac{t}{100}x_0 = x_1 - x_0$, c'est-à-dire : $\frac{t}{100} = \frac{x_1 - x_0}{x_0}$

2. Par définition, on a : $x_1 = x_0 - \frac{t}{100}x_0$, donc $x_1 = (1 - \frac{t}{100})x_0$
Cette relation donne aussi : $\frac{t}{100}x_0 = x_0 - x_1$, c'est-à-dire : $\frac{t}{100} = \frac{x_0 - x_1}{x_0}$

remarque :

L'égalité $\frac{t}{100} = \frac{x_1 - x_0}{x_0}$ permet de calculer t quand on connaît x_0 et x_1 .

I - 2) méthode

a) méthode

le principe à retenir est le suivant :

Prix de départ × **Coefficient multiplicateur** = **Prix final**

Dans les exercices, on donnera soit :

- * **le prix de départ** et **l'augmentation/diminution** en pourcentage : **prix final** à trouver
- * **le prix de départ** et **le prix final** : **augmentation/ diminution** en pourcentage à trouver
- * **le prix final** et **l'augmentation/réduction** en pourcentage : **prix de départ** à trouver

b) coefficient multiplicateur

Il faut absolument être capable de passer à une augmentation / diminution exprimée en pourcentage au coefficient multiplicateur correspondant, et vice versa :

augmentation / diminution (%)	coefficient multiplicateur
+ 25%	$k = 1 + \frac{25}{100} = 1,25$
-2%	$k = 1 - \frac{2}{100} = 0,98$
c'est une hausse $1,55 - 1 = 55\%$	$k = 1,55$
c'est une baisse $1 - 0,47 = 53\%$	$k = 0,47$
c'est une hausse $3 - 1 = 2 = 200\%$	$k = 3$

c) exemples

exemple n°1 :

Prix de départ : 1,28 € ; prix final : 1,402 € ; quelle évolution ?

Il s'agit d'une hausse.

$$\text{Prix de départ} \times \text{Coefficient multiplicateur} = \text{Prix final}$$

Cela donne : $1,28 \times k = 1,402$, (en notant k le coefficient multiplicateur correspondant à cette hausse) ; ce qui revient à :

$$k = \frac{1,402}{1,28} = 1,1$$

Reste à faire le lien entre un coefficient multiplicateur et une évolution en pourcentage : un coefficient multiplicateur de 1,1 correspond à une hausse de $1,1 - 1 = 0,1 = 10\%$.

exemple n°2 :

Prix final : 36 € ; évolution : baisse de 20 % ; quel prix initial ?

$$\text{Prix de départ} \times \text{Coefficient multiplicateur} = \text{Prix final}$$

Une baisse de 20 % donne un coefficient multiplicateur égal à : $1 - \frac{20}{100} = 0,8$

Cela donne : $x \times 0,8 = 36$, (en notant x le prix de départ recherché) ; ce qui revient à :

$$x = \frac{36}{0,8} = 45$$

Le prix avant la baisse était égal à 45 €.

II Evolutions successives

II - 1) méthode

Dans ce type de problème, on propose des évolutions exprimées en pourcentage les unes à la suite des autres.

On peut schématiser ainsi :

$$\text{Prix de départ} \rightarrow \text{évolution n°1} \rightarrow \text{Prix n°1} \rightarrow \text{évolution n°2} \rightarrow \text{Prix n°2} \dots$$

Il suffira d'appliquer la méthode vue dans le paragraphe précédent plusieurs fois de suite.

II - 2) exemples

exemple n°1 :

De janvier à juin 2010, le prix d'un produit a augmenté de 20%, de juillet à décembre 2010, il a subi une nouvelle hausse de 30%. Ainsi, ce produit a subi deux hausses successives.

Le coefficient multiplicateur associé à la première hausse est égal à $1 + \frac{20}{100} = 1,2$

Le coefficient multiplicateur associé à la deuxième hausse est égal à $1 + \frac{30}{100} = 1,3$

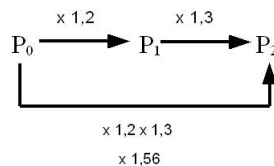
Si on note P_0 le prix en janvier 2010, P_1 le prix en juin 2010 et P_2 le prix en décembre 2010, on a :

$$P_0 \times 1,2 = P_1 \text{ et } P_1 \times 1,3 = P_2$$

Ainsi, on obtient : $P_0 \times 1,2 \times 1,3 = P_2$, c'est-à-dire $P_0 \times 1,56 = P_2$

Pour passer du prix de janvier 2010 au prix de décembre 2010, on a un coefficient multiplicateur égal à 1,56, ce qui correspond à une hausse de 56%.

On peut résumer par le schéma suivant :



La conclusion de cet exercice est qu'une hausse de 20% suivie d'une hausse de 30% revient à une hausse de 56%.

exemple n°2 :

Une grandeur augmente de 50% puis baisse de 50%.

Le coefficient multiplicateur associé à la hausse est égal à $1 + \frac{50}{100} = 1,5$

Le coefficient multiplicateur associé à la baisse est égal à $1 - \frac{50}{100} = 0,5$

Le coefficient multiplicateur associé à la hausse suivie de la baisse est égal à : $1,5 \times 0,5 = 0,75$.

Ce coefficient multiplicateur correspond à une baisse de 25%.

Retenir : le coefficient multiplicateur $\boxed{1 + \frac{t}{100}}$ ou $\boxed{1 - \frac{t}{100}}$ est un outil efficace de résolution de problèmes de situations d'évolutions successives.

III Evolution réciproque

définition :

Une grandeur de valeur initiale x_0 non nulle augmente de $t\%$, notons x_1 sa nouvelle valeur.

Le pourcentage de baisse de x_1 , pour que cette grandeur retrouve sa valeur initiale x_0 est appelé **pourcentage d'évolution réciproque**.

remarque : on définit de manière analogue le pourcentage d'évolution réciproque dans le cas d'une baisse de $t\%$.

exemple :

Une grandeur de valeur initiale x_0 non nulle subit une hausse de 50%. Notons x_1 sa nouvelle valeur et cherchons le pourcentage de baisse réciproque :

* pour passer de x_0 à x_1 , on multiplie par $1 + \frac{50}{100} = 1,5$

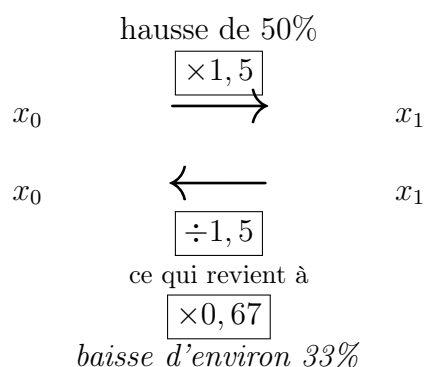
* pour passer de x_1 à x_0 , on divise donc par 1,5

* chercher à trouver l'évolution de x_1 à x_0 , c'est chercher par combien on doit multiplier x_1 pour obtenir x_0

* or, diviser par 1,5 revient à multiplier par son inverse, c'est-à-dire par $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \approx 0,67$

* on a trouvé le coefficient multiplicatif permettant de passer de x_1 à x_0 : environ 0,67, ce qui correspond à une baisse de $1 - 0,67 = 0,33 = 33\%$

Conclusion : l'évolution réciproque d'une hausse de 50% est une baisse d'environ 33%.



IV Pourcentages d'évolution et indices

Le tableau ci-dessous donne le cours annuel d'un produit à New-York (en dollars par tonne) de janvier 2010 à mars 2010.

Mois	Janvier	Février	Mars
Cours	1598	1533	1662

Nous allons dresser un tableau permettant d'avoir rapidement le pourcentage d'évolution pour chaque mois par rapport au premier mois, c'est-à-dire janvier.

Notion d'indice :

On choisit comme mois de référence le mois de janvier et on ramène à 100 le cours de ce mois.

Reste à compléter ce tableau **en respectant les proportions**.

Mois	Janvier	Février	Mars
Cours	1598	1533	1662
Indice	100	96	104

D'après ce tableau, l'évolution entre Janvier et Février est une baisse de 4%.

L'évolution entre Janvier et Mars est une hausse de 4%.

remarques :

* Il n'est pas indispensable de mettre en place des indices pour déterminer des pourcentages d'évolution.

* L'utilisation d'un indice (presque toujours un indice 100 fixé à un moment donné) permet une lecture plus aisée du tableau, en donnant notamment par simple lecture **certains** pourcentages d'évolution.

Chapitre 4

Suites

I Qu'est-ce qu'une suite ?

Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres réels, finie ou infinie. Cela signifie que parmi ces nombres, il y a un premier, que nous pourrions noter u_1 (lire « *u indice 1* »), un deuxième u_2 (« *u indice 2* »), un troisième u_3 et, de manière générale, un n -ième u_n (« *u indice n* »).

I - 1) notations et définitions

On note (u_n) la suite $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$. Le nombre u_n est appelé terme d'indice n de la suite (u_n) .

Il est parfois commode de noter u_0 le premier terme, ce que nous ferons en général.

exemple :

Posons, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n$.

Nous définissons ainsi la suite (u_n) dont les premiers termes sont :

$$u_0 = 3^0 = 1; u_1 = 3^1 = 3; u_2 = 3^2 = 9; \dots; u_{10} = 3^{10} = 59049$$

Attention : (u_n) désigne une suite tandis que u_n sans parenthèses désigne un nombre.

I - 2) modes de génération d'une suite

Il y a deux procédés usuels pour définir une suite.

* suite définie de manière explicite

Par exemple : $u_n = n^2 + 2n$

Alors : $u_0 = 0, u_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3, u_2 = 2^2 + 2 \times 2 = 8, u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) = n^2 + 4n + 3$

* suite définie par une relation de récurrence

Ce procédé signifie que l'on donne le premier terme u_0 et une relation permettant de définir chaque terme à partir du précédent.

Un telle relation est appelée une **relation de récurrence**.

Par exemple : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n + 1$

On peut alors calculer successivement les termes $u_1, u_2, u_3, \dots$

Ainsi : $u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$; $u_2 = 3u_1 + 1 = 22$; etc.

II Représentation graphique

La **représentation graphique**, dans un repère, des termes d'une suite (u_n) est l'ensemble des **points isolés** de coordonnées $(0; u_0), (1; u_1), (2; u_2), \dots, (n; u_n), \dots$

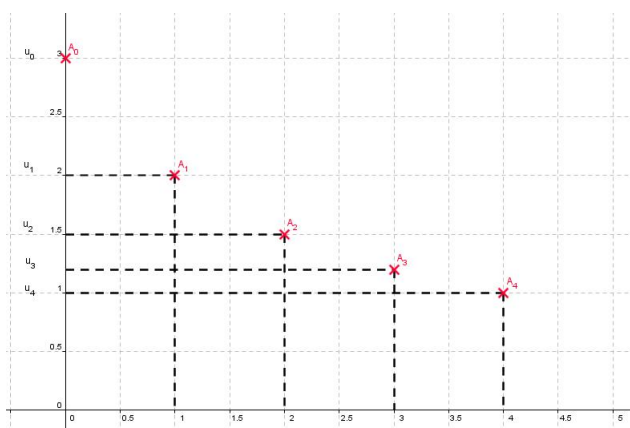
exemple :

On considère la suite (u_n) définie par :

pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{6}{n+2}$

$u_0 = 3$; $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{3}{2}$; $u_3 = \frac{6}{5}$; $u_4 = 1$

Les points $A_0(0; 3)$, $A_1(1; 2)$, $A_2(2; \frac{3}{2})$, $A_3(3; \frac{6}{5})$, $A_4(4; 1)$ sont les cinq premiers points de la représentation graphique de cette suite.



III Sens de variation d'une suite

III - 1) de quoi s'agit-il ?

* lorsque chaque terme d'une suite est strictement inférieur au terme qui le suit, on dit que la suite est strictement croissante.

* lorsque chaque terme d'une suite est strictement supérieur au terme qui le suit, on dit que la suite est strictement décroissante.

définition 1 :

* la suite (u_n) est dite **strictement croissante** lorsque :

pour tout naturel n , $u_n < u_{n+1}$

* la suite (u_n) est dite **strictement décroissante** lorsque :

pour tout naturel n , $u_n > u_{n+1}$

remarques :

On définit de même une suite croissante en utilisant une inégalité large : $u_n \leq u_{n+1}$

De même, pour une suite décroissante, on remplace $u_n > u_{n+1}$ par $u_n \geq u_{n+1}$

exemples :

* la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 5n + 1$ est strictement croissante.

En effet, pour tout naturel n , $u_{n+1} - u_n = 5n + 6 - (5n + 1) = 5$

Donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$

* la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n^2 + 4$ est strictement décroissante.

En effet, pour tout naturel n , $v_{n+1} = -(n+1)^2 + 4 = -(n^2 + 2n + 1) + 4 = -n^2 + 2n + 3$

Donc, $v_{n+1} - v_n = -n^2 + 2n + 3 - (-n^2 + 4) = -2n - 1$

Donc, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n < 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} < v_n$

Attention : une suite peut être ni croissante, ni décroissante ...

Prenons la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = n^2 - 10n + 27$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (n+1)^2 - 10(n+1) + 27 - (n^2 - 10n + 27) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 + 27 - n^2 + 10n - 27 \\ &= 2n - 9 \end{aligned}$$

Or, $2n - 9$ est tantôt positif, tantôt négatif, selon les valeurs de l'entier naturel n .

$w_{n+1} - w_n$ n'a pas un signe constant : la suite (w_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

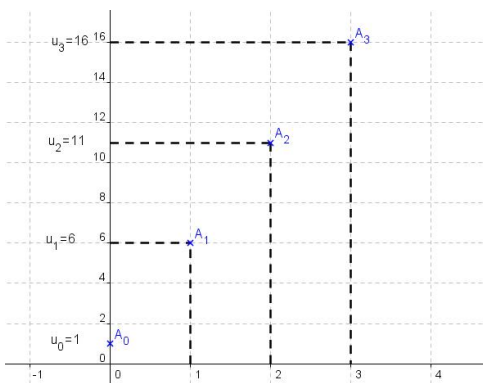
III - 2) interprétation graphique

Représentons graphiquement les suites (u_n) et (v_n) définies précédemment :

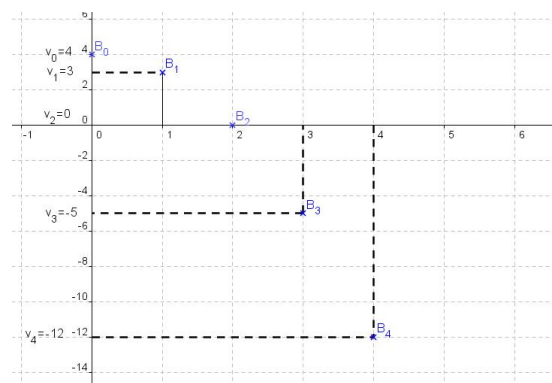
$$u_n = 5n + 1$$

$$v_n = -n^2 + 4$$

La suite (u_n) est strictement croissante ; sa représentation graphique est la suivante :



La suite (v_n) est strictement décroissante ; sa représentation graphique est la suivante :



IV suites arithmétiques

IV - 1) qu'est-ce qu'une suite arithmétique ?

Lorsque pour une suite (u_n) , on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en ajoutant toujours le même nombre fixe, on dit que la suite (u_n) est arithmétique. Plus précisément :

définition 2 :

Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

exemple :

(u_n) est une suite arithmétique de raison (-3) et de premier terme $u_0 = 8$.

Alors : $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = -1$, ...

remarque : le réel r peut être positif ou négatif.

Si $r = 0$, alors tous les termes de la suite sont égaux : la suite est **constante**.

IV - 2) calcul de u_n lorsqu'on connaît u_0 et r

théorème 1 :

1. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

2. Réciproquement :

si pour tout naturel n , $u_n = b + an$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a .

démonstration :

On utilise la définition d'une suite arithmétique.

1. $u_1 = u_0 + r$ et $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$

et ainsi, de proche en proche, on obtient $u_3 = u_0 + 3r$, ... , $u_n = u_0 + nr$

2. $u_{n+1} - u_n = b + a(n+1) - (b + an) = a$, d'où le résultat.

exemples :

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que : $u_0 = 5$ et $r = 3$.

Alors $u_{50} = 5 + 50 \times 3 = 155$

2. (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 + 8n$.

Alors (u_n) est une suite arithmétique de raison 8.

IV - 3) calcul de u_n lorsqu'on connaît u_p et r

théorème 2 :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r .

Alors, pour tout naturel n et tout naturel p :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

démonstration :

On utilise la formule $u_n = u_0 + nr$.

$$u_n = u_0 + nr \text{ et } u_p = u_0 + pr$$

$$\text{Donc } u_n - u_p = nr - pr; \text{ d'où } u_n = u_p + (n - p)r$$

remarque : si $p = 0$, on retrouve le théorème 1.

exemple : (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{15} = 9$ et $r = 1,5$.

On peut alors calculer rapidement n'importe quel terme de la suite ; calculons u_{32} , u_2 et u_0 :

$$* u_{32} = u_{15} + (32 - 15)r = 9 + 17 \times 1,5 = 34,5$$

$$* u_2 = u_{15} + (2 - 15)r = 9 - 13 \times 1,5 = -10,5$$

$$* u_0 = u_{15} + (0 - 15) \times 1,5 = 9 - 15 \times 1,5 = -13,5$$

IV - 4) sens de variation d'une suite arithmétique

théorème 3 :

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors :

* si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.

* si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.

démonstration :

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r , de premier terme u_0 , alors pour tout naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + r) - u_n = r$$

* si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: la suite est strictement croissante.

* si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est strictement décroissante.

IV - 5) représentation graphique d'une suite arithmétique

théorème 4 :

La représentation graphique des termes d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés.

démonstration :

On utilise la formule $u_n = u_0 + nr$.

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , on a vu que pour tout naturel n ,
 $u_n = u_0 + nr$.

Tous les points $(n; u_n)$ se trouvent donc sur la droite d d'équation $y = rx + u_0$

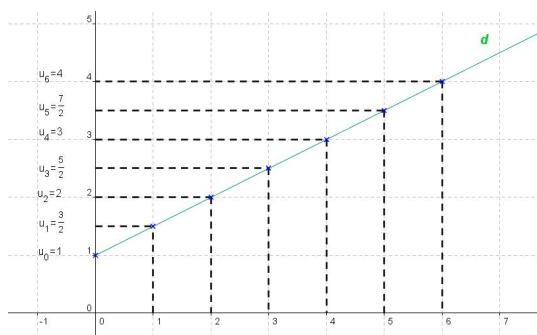
exemples :

(u_n) est la suite arithmétique telle que :

$$u_0 = 1 \text{ et } r = \frac{1}{2}$$

d est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$

Les sept premiers points de la représentation graphique de la suite et la droite d sont représentés sur la figure ci-dessous.

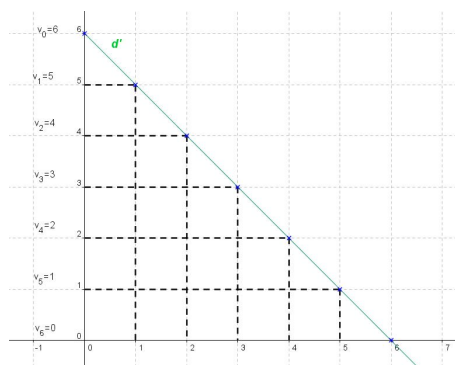


(v_n) est la suite arithmétique telle que :

$$v_0 = 6 \text{ et } r = -1$$

d' est la droite d'équation $y = -x + 6$

Les sept premiers points de la représentation graphique de la suite et la droite d' sont représentés sur la figure ci-dessous.



V suites géométriques

V - 1) qu'est-ce qu'une suite géométrique ?

Lorsque pour une suite (u_n) , on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en multipliant toujours le même nombre fixe (*ce nombre doit être positif*), on dit que la suite (u_n) est géométrique. Plus précisément :

définition 3 :

Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** de raison strictement positive signifie qu'il existe un réel $q > 0$ tel que, pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n) .

exemple :

(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 2$.

Alors : $u_1 = 5 \times u_0 = 10$, $u_2 = 5 \times u_1 = 50 \dots$

V - 2) calcul de u_n lorsqu'on connaît u_0 et q

théorème 5 :

1. Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$, alors pour tout naturel n :

$$u_n = q^n u_0$$

2. Réciproquement :

si pour tout naturel n , $u_n = ba^n$ ($a > 0$), alors (u_n) est une suite géométrique de raison a .

démonstration :

On utilise la définition d'une suite géométrique.

1. $u_1 = qu_0$ et $u_2 = qu_1 = q(qu_0) = q^2 u_0$
et ainsi, de proche en proche, on obtient $u_3 = q^3 u_0, \dots, u_n = q^n u_0$

2. $u_{n+1} = ba^{n+1} = b(a^n) \times a = u_n \times a$, d'où le résultat.

exemples :

1. (u_n) est une suite géométrique telle que : $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$.

Alors $u_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 3 = \frac{3}{2^6} = \frac{3}{64}$

2. (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4^n \times 5$.

Alors (u_n) est une suite géométrique de raison 4.

V - 3) calcul de u_n lorsqu'on connaît u_p et q

théorème 6 :

(u_n) est une suite géométrique de raison q .
Alors, pour tout naturel n et tout naturel p :

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

démonstration :

On utilise la formule $u_n = u_0 q^n$.

$$u_n = u_0 q^n \text{ et } u_p = u_0 q^p$$

Comme $q \neq 0$, $u_p = u_0 q^p$ peut aussi s'écrire : $u_0 = \frac{u_p}{q^p}$

On remplace u_0 par cette expression dans $u_n = u_0 q^n$ et on obtient :

$$u_n = \frac{u_p}{q^p} \times q^n = u_p \frac{q^n}{q^p} = u_p q^{n-p}$$

remarque : si $p = 0$, on retrouve le théorème 5.

exemple : (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{9}{2}$ et telle que $u_{10} = 5$.

On peut alors calculer rapidement n'importe quel terme de la suite ; calculons u_{50} , u_6 et u_0 :

$$* u_{50} = u_{10} \times q^{50-10} = 5 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{40}$$

$$* u_6 = u_{10} \times q^{6-10} = 5 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{-4} = 5 \times \frac{2^4}{9^4}$$

$$* u_0 = u_{10} \times q^{0-10} = 5 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{-10} = 5 \times \frac{2^{10}}{9^{10}}$$

V - 4) sens de variation d'une suite géométrique

théorème 7 :

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q (avec $q > 0$),
de premier terme u_0 strictement positif, alors :

* si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante.

* si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

démonstration :

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$, de premier terme $u_0 > 0$, alors pour tout naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q - 1)$$

Comme on a supposé $u_0 > 0$, q étant lui aussi positif, la différence $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $q - 1$

* si $q > 1$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: la suite est strictement croissante.

* si $q < 1$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est strictement décroissante.

V - 5) représentation graphique d'une suite géométrique : évolution exponentielle

exemples :

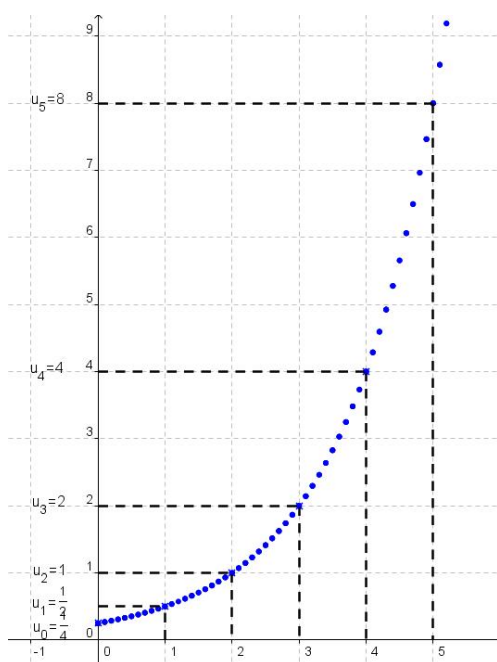
(u_n) est la suite géométrique telle que :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } q = 2$$

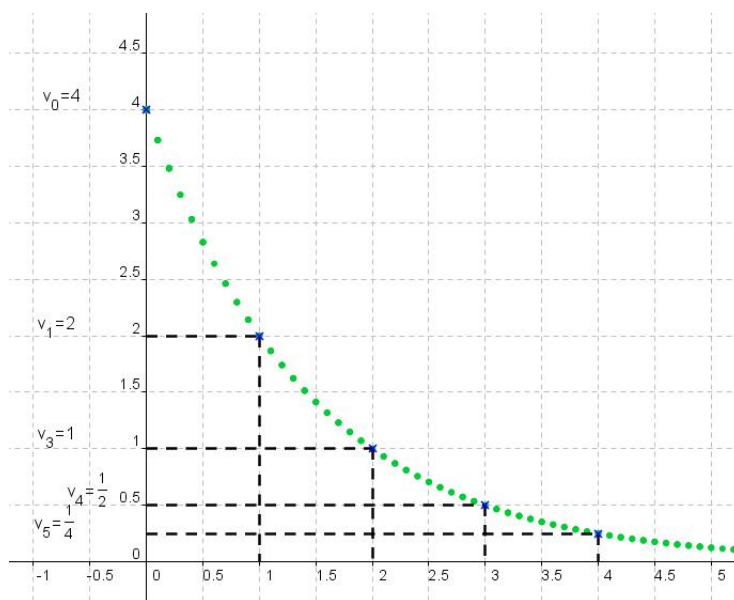
(v_n) est la suite géométrique telle que :

$$v_0 = 4 \text{ et } q = \frac{1}{2}$$

Pour chaque suite, on représente les six premiers termes de la suite et on relie les points ainsi obtenus.



suite (u_n) de raison 2



suite (v_n) de raison $\frac{1}{2}$

Chapitre 5

Statistiques

I variance et écart-type

I - 1) introduction

Deux séries statistiques peuvent avoir la même moyenne mais la répartition des valeurs autour de cette moyenne peut être différente pour les deux séries.

exemple : considérons les deux séries statistiques suivantes :

$$S_1 : (9; 9; 11; 11) \text{ et } S_2 = (1; 1; 19; 19)$$

Les deux séries ont la même moyenne : 10.

Mais la dispersion des valeurs autour de cette moyenne est très différente : dans la série S_1 , les notes sont peu dispersées et dans la série S_2 , elles sont très dispersées.

Pour traduire cela, on va utiliser un nouveau paramètre : la variance.

I - 2) définitions

définition 1 :

On considère la série statistique donnée par le tableau ci-dessous :

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p	Total
Effectif	n_1	n_2	...	n_p	N

Sa **variance** V est définie par :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$$

où $\bar{x}$ désigne la moyenne de cette série.

définition 2 :

L'**écart-type** σ d'une série statistique est égale à la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

exemple : calculons la variance et l'écart-type des deux séries de l'exemple du paragraphe I.1 :

* Série S_1 : variance : $V_1 = \frac{2(9-10)^2 + 2(11-10)^2}{4} = 1$
 écart-type : $\sigma_1 = \sqrt{1} = 1$

* Série S_2 : variance : $V_2 = \frac{2(1-10)^2 + 2(19-10)^2}{4} = 81$
 écart-type : $\sigma_2 = \sqrt{81} = 9$

remarques :

* la variance d'une série statistique peut aussi être obtenue ainsi : on calcule les nombres $(x_i - \bar{x})^2$.

La variance V est alors égale à la moyenne des valeurs $(x_i - \bar{x})^2$.

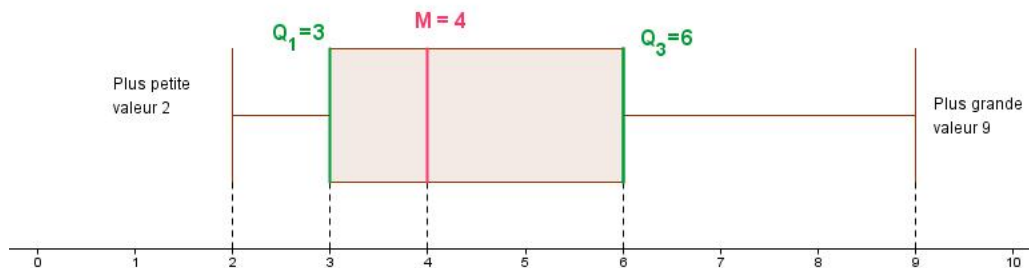
* les calculatrices usuelles permettent d'obtenir directement l'écart-type d'une série statistique.

II diagramme en boîte

* la médiane et les quartiles d'une série statistique permettent d'obtenir d'autres types d'informations sur cette série.

* il est donc commode de faire figurer sur un même graphique la médiane et les quartiles d'une série statistique. Souvent, on représente aussi les valeurs extrêmes de la série.

* voici un exemple de graphique correspondant à une série statistique de médiane $M = 4$, de quartiles $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 6$, et de valeurs extrêmes 2 et 9.



Un tel graphique est appelé **diagramme en boîte**.

Les quartiles Q_1 et Q_3 correspondent aux côtés délimitant la « boîte ».

La médiane M correspond au trait vertical à l'intérieur de la boîte.

remarques :

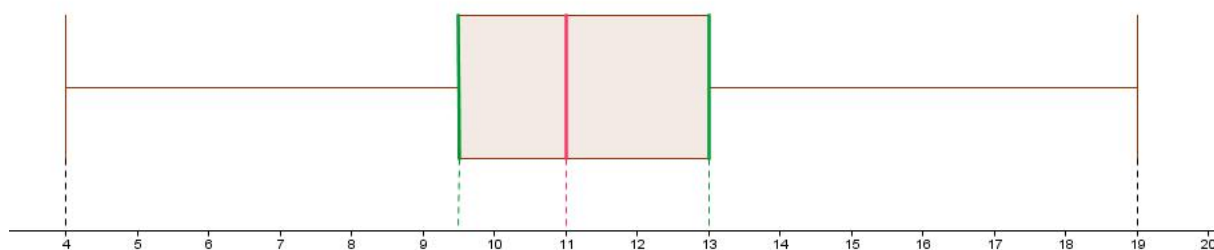
* on appelle aussi ce diagramme « boîte à moustaches » ou « boîte à pattes ».

* on peut aussi construire ce diagramme verticalement.

* les calculatrices usuelles l'affichent horizontalement.

lecture d'un diagramme en boîte :

Le diagramme en boîte ci-dessous est associé à la série des notes moyennes des élèves d'un lycée au baccalauréat :



Sur le diagramme, on lit :

* $M = 11$, ce qui permet d'affirmer qu'au moins 50% des élèves ont une note supérieure ou égale à 11, et sont donc reçus sans passer les épreuves de rattrapage.

* $Q_3 = 13$, ce qui permet d'affirmer qu'environ 25%¹ des élèves ont une note supérieure ou égale à 13, donc qu'environ 25% des élèves ont au moins la mention Assez bien (ou l'une des mentions Assez bien, Bien, Très bien).

* $Q_1 = 9,5$, ce qui permet d'affirmer qu'un moins 25% des élèves ont une note inférieure ou égale à 9,5 et ne sont donc pas reçus directement. Mais on ne peut pas savoir, avec ce diagramme, combien, parmi ces élèves, ont une note supérieure ou égale à 8 et pourront donc passer les épreuves de rattrapage.

1. soit 25%, soit légèrement moins

Chapitre 6

Probabilités - Variable aléatoire

I Variable aléatoire et loi de probabilité

définition 1 :

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule $X, Y, Z, \dots$

Lorsque $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les valeurs prises par une variable aléatoire X , on note $(X = a_i)$ l'évènement « X prend la valeur a_i » (avec $1 \leq i \leq n$).

exemple :

On définit un jeu par la règle suivante :

« On lance un dé bien équilibré à 6 faces. On perd autant d'euros que le numéro sorti, sauf pour le 6 où on gagne 12 euros. »

* L'expérience aléatoire est le lancer du dé.

* Les évènements élémentaires sont les numéros de sortie du dé.

* A chaque numéro de sortie du dé, on associe selon la règle explicitée, un nombre :

- si le nombre 1 sort, on lui associe (-1) (puisqu'on perd 1€).

- si le nombre 6 sort, on lui associe 12 (puisqu'on gagne 12€).

On peut ainsi définir la variable aléatoire X qui correspond au *gain algébrique* (gain s'il est positif, perte s'il est négatif) lorsqu'on joue à ce jeu avec cette règle.

définition 2 :

Lorsqu'à chaque valeur a_i (avec $1 \leq i \leq n$) prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité de l'évènement $(X = a_i)$, on dit qu'on a défini la **loi de probabilité de X** .

On peut présenter cette loi grâce à un tableau.

Notez que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Valeur de a_i	a_1	a_2	$\dots$	a_n
$p(X = a_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

exemple :

En reprenant l'exemple précédent, la loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le gain (algébrique) est donnée par le tableau suivant :

Gain	-1	-2	-3	-4	-5	12
$p(X = a_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

II Espérance mathématique

Considérons une variable aléatoire X qui prend les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$.

définition 3 :

L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = a_1 \times p(X = a_1) + a_2 \times p(X = a_2) + \dots + a_n \times p(X = a_n)$$

remarque :

L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

exemple :

Dans le cas du jeu de dé, l'espérance est égale à :

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{6} + (-3) \times \frac{1}{6} + (-4) \times \frac{1}{6} + (-5) \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{6}$$

$$\text{Cela donne : } E(X) = \frac{-15 + 12}{6} = -\frac{1}{2}$$

L'espérance de ce jeu étant négative, cela signifie que si l'on y joue un grand nombre de fois, on est presque sûr de perdre de l'argent.

La règle du jeu est favorable à la personne qui organise le jeu.

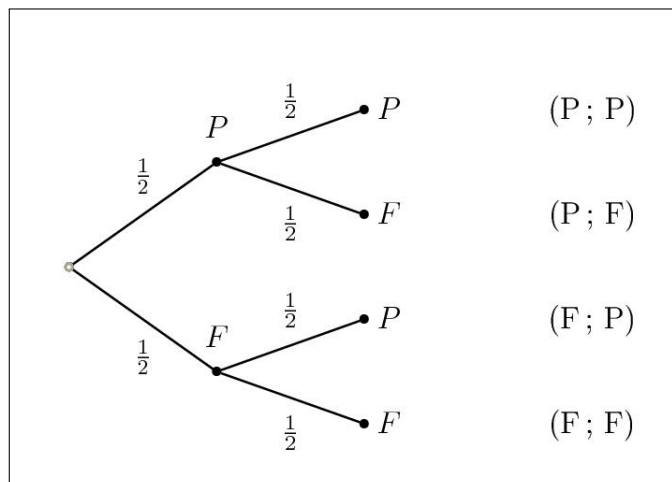
III Répétition d'expériences - Arbres pondérés

Il est commode de représenter une répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. On peut alors appliquer la **règle suivante** :

La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

exemple :

On lance deux fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Cette situation peut être représentée par l'arbre pondéré ci-dessous, dans lequel P désigne l'évènement « obtenir PILE » et F l'évènement « obtenir FACE ».



On note X la variable aléatoire comptant le nombre de FACE observé à chaque série de deux lancers.

* $p(X = 0)$ est égale à la probabilité de n'obtenir aucun FACE c'est à dire $p((P, P))$.

$$\text{Donc } p(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{De même, } p(X = 1) = p((F, P), (P, F)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On représente la loi de probabilité de X dans le tableau ci-dessous :

Valeur a_i	0	1	2
$p(X = a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Il est facile de vérifier que $p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 1$

$$* E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

Chapitre 7

Loi binomiale. Échantillonnage

I Schéma de Bernoulli

I - 1) épreuve de Bernoulli

* lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S (appelé « succès ») ou à sa non réalisation $\bar{S}$ (appelé « échec »), on dit que cette expérience est une **épreuve de Bernoulli**.

* notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

On dit que X suit une **loi de Bernoulli**.

exemple : un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsque le 6 sort et perd dans le cas contraire.

Appelons « succès » l'événement S « Sortie du 6 » ; l'échec $\bar{S}$ est donc l'événement « Le 6 ne sort pas ».

Si le dé n'est pas pipé : $p(S) = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{S}) = 1 - p(S) = \frac{5}{6}$.

La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si le 6 sort et la valeur 0 dans les cinq autres cas suit une loi de Bernoulli.

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

I - 2) schéma de Bernoulli

Lorsqu'on effectue plusieurs épreuves de Bernoulli successives, indépendantes les unes des autres, on dit qu'il s'agit d'un **schéma de Bernoulli**.

exemple : l'expérience qui consiste à effectuer trois fois de suite l'épreuve de Bernoulli de l'exemple précédent (paragraphe I.1) est un schéma de Bernoulli.

On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès après les trois lancers.

Les valeurs possibles prises par Y sont :

- * $Y = 0$: les trois lancers n'ont jamais donné le 6. Il y a eu trois échecs.
- * $Y = 1$: un des trois lancers a donné le 6, les deux autres ont donné un nombre autre que le 6. Il y a eu un succès et deux échecs.
- * $Y = 2$: un des trois lancers n'a pas donné le 6, les deux autres ont donné le 6. Il y a eu deux succès et un échec.
- * $Y = 3$: les trois lancers ont donné le 6. Il y a eu trois succès.

Le but du paragraphe qui suit est de déterminer rapidement la probabilité de chacun de ces évènements, autrement dit de mettre en place la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .

II Loi binomiale

II - 1) loi binomiale de paramètres n et p

définition 1 :

On considère un schéma de Bernoulli constitué par la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès S .

La loi de probabilité de la variable aléatoire X comptant le nombre de succès est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** .

On note cette loi : $\mathcal{B}(n, p)$

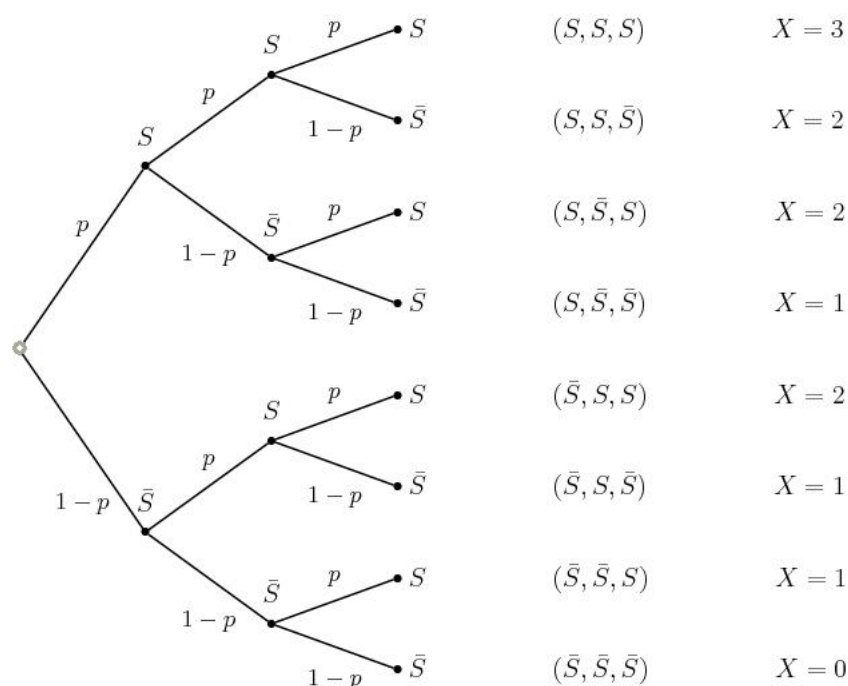
exemple : la variable aléatoire Y du paragraphe I.2 comptant le nombre de sorties du 6 après trois lancers d'un dé bien équilibré suit une loi binomiale de paramètres :

- * $n = 3$: il s'agit en effet de la répétition de **trois** épreuves de Bernoulli.
- * $p = \frac{1}{6}$: en effet, la probabilité du succès de chaque épreuve (*ici la probabilité que le 6 sorte*) est égale à $\frac{1}{6}$.

On dit que cette variable aléatoire suit la loi $\mathcal{B}(3, \frac{1}{6})$

II - 2) coefficients binomiaux

exemple : on considère un schéma de Bernoulli constitué de trois épreuves de Bernoulli identiques. On pose $p = \text{Prob}(S)$. X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès. Cette situation peut être représentée par l'arbre ci dessous :



* probabilité que trois succès aient lieu :

Il n'y a qu'une seule manière d'obtenir trois succès (chemin du haut) ; les trois succès sont obtenus à la probabilité p^3 ; on note : $p(X = 3) = p^3$

* probabilité que deux succès aient lieu :

Il y a trois manières d'obtenir cette probabilité (trois chemins sur l'arbre) : on note $\binom{3}{1}$ pour signifier qu'on comptabilise le nombre de succès (1 ici) parmi le nombre d'essais (3 ici).

Ce nombre de chemins $\binom{3}{1}$ est appelé **coefficient binomial**.

Chaque issue comptant deux succès et un échec a une probabilité égale à $p^2(1-p)$.

Finalement, $p(X = 1) = \binom{3}{1}p^2(1-p) = 3p^2(1-p)$

définition 2 :

On considère l'arbre associé à un schéma de Bernoulli constitué par la répétition de n expériences.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès.

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.

$\binom{n}{k}$ se lit : « k parmi n ».

En pratique : les calculatrices usuelles permettent d'obtenir les nombres $\binom{n}{k}$.

Pour les petites valeurs de n , ces nombres peuvent être calculés directement à l'aide d'un arbre.

Par exemple, en utilisant l'arbre précédent, on obtient :

$$\binom{3}{3} = 1 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{0} = 1$$

II - 3) formule de la loi binomiale

théorème 1 :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors :

pour tout entier $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $Prob(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

démonstration :

L'événement $(X = k)$ est associé à l'ensemble des chemins pour lesquels il y a k succès et $n - k$ échecs. Chacun de ces chemins a une probabilité égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui le constituent, c'est-à-dire à $p^k (1 - p)^{n-k}$. Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins de ce type. D'où : $Prob(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

exemple : on reprend l'exemple du paragraphe I.2 concernant la variable aléatoire Y .

Y suit une loi $\mathcal{B}(3, \frac{1}{6})$.

On peut directement déterminer les probabilités suivantes :

* réalisation de trois échecs : $P(Y = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 57,9\%$

* réalisation d'un succès : $P(Y = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 34,7\%$

* réalisation de deux succès : $P(Y = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} \approx 6,9\%$

* réalisation de trois succès : $P(Y = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-3} = 1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 1 \approx 0,5\%$

On peut vérifier que la somme de ces probabilités est égale à 100% (autrement dit à 1).

II - 4) espérance d'une loi binomiale

théorème 2 :

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors :

$$E(X) = np$$

démonstration :

Ce théorème est admis.

exemple : l'espérance de la loi Y qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{6})$ est égale à :

$$E(Y) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la « moyenne » de la variable aléatoire Y est égale à $\frac{1}{2}$, autrement dit, que si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire consistant à lancer trois fois de suite un dé, la valeur moyenne du nombre de 6 sortis sera proche de $\frac{1}{2}$.

III Échantillonnage

III - 1) un exemple pour comprendre

On reprend le jeu présenté au début de ce cours, à savoir un lancer de dé. On appellera succès le fait d'obtenir un 6.

A présent, on va répéter cette épreuve de Bernoulli 100 fois.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès ; X suit une loi $\mathcal{B}(100, \frac{1}{6})$.

Jean dit : « sur 100 lancers de dé, je suis sûr d'obtenir entre 7 fois et 27 fois le 6. »

Paul affirme lui : « sur 100 lancers, je suis certain d'obtenir entre 15 fois et 20 fois le 6. »

Que veut dire « être sûr » ? Dans ce cas, la seule chose dont on est sûr à 100% est d'obtenir entre 0 et 100 fois le 6 !

On va essayer d'affiner ce raisonnement, en se donnant un **seuil** de 95 % par exemple.

Cela signifie que l'on va chercher l'intervalle donnant à une probabilité de 95% le nombre de sorties de 6.

Méthode :

1. on calcule $p(X = k)$ pour k allant de 0 à 100.
2. on calcule les probabilités $p(X \leq k)$ pour k allant de 0 à 100 : il suffit d'additionner les probabilités calculées précédemment.
3. on cherche la plus petite valeur k telle que $p(X \leq k) > 2,5\%$: on note k_1 cette valeur. (2,5% correspond à la moitié de 5%)
4. on cherche la plus petite valeur de k telle que $p(X \leq k) \geq 97,5\%$: on note k_2 cette valeur. (97,5% correspond à 100%-2,5%)
5. l'intervalle $[k_1; k_2]$ est l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Table de la loi $\mathcal{B}(100, \frac{1}{6})$:

On représente ici un extrait de calculs des probabilités d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(100, \frac{1}{6})$.

La ligne correspondant à $X = 16$ signifie :

* la probabilité que le 6 sorte exactement 16 fois sur 100 lancers est égale à 10,65%.

* la probabilité que le 6 sorte moins de 16 fois (*y compris 16 fois*) sur 100 lancers est égale à 49,42%.

X	$p(X=k)$	$p(X \leq k)$
3	0,00%	0,00%
4	0,01%	0,01%
5	0,03%	0,04%
6	0,09%	0,13%
7	0,25%	0,38%
8	0,58%	0,95%
9	1,18%	2,13%
10	2,14%	4,27%
11	3,50%	7,77%
12	5,20%	12,97%
13	7,03%	20,00%
14	8,74%	28,74%
15	10,02%	38,77%
16	10,65%	49,42%
17	10,52%	59,94%
18	9,71%	69,65%
19	8,38%	78,03%
20	6,79%	84,81%
21	5,17%	89,98%
22	3,71%	93,69%
23	2,52%	96,21%
24	1,62%	97,83%
25	0,98%	98,81%
26	0,57%	99,38%
27	0,31%	99,69%
28	0,16%	99,85%
29	0,08%	99,93%
30	0,04%	99,97%
31	0,02%	99,99%
32	0,01%	100,00%

Recherche de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour la loi $\mathcal{B}(100, \frac{1}{6})$:

* le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) > 2,5\%$ est égal ici à 10.

* le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) \geq 97,5\%$ est égal à ici à 24.

* pour la loi $\mathcal{B}(100, \frac{1}{6})$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est $[10; 24]$: cela signifie que la probabilité pour que le 6 sorte entre 10 et 24 fois sur 100 lancers est environ égale à 95%.

Autrement dit, « on est sûr à 95% » que sur 100 lancers, le 6 sortira entre 10 et 24 fois.

remarque : Jean avait raison (au seuil de 95% mais son intervalle pouvait être affiné).

Paul a tort au seuil de 95% ... il n'a raison qu'au seuil de 56%...¹

Interprétation graphique :

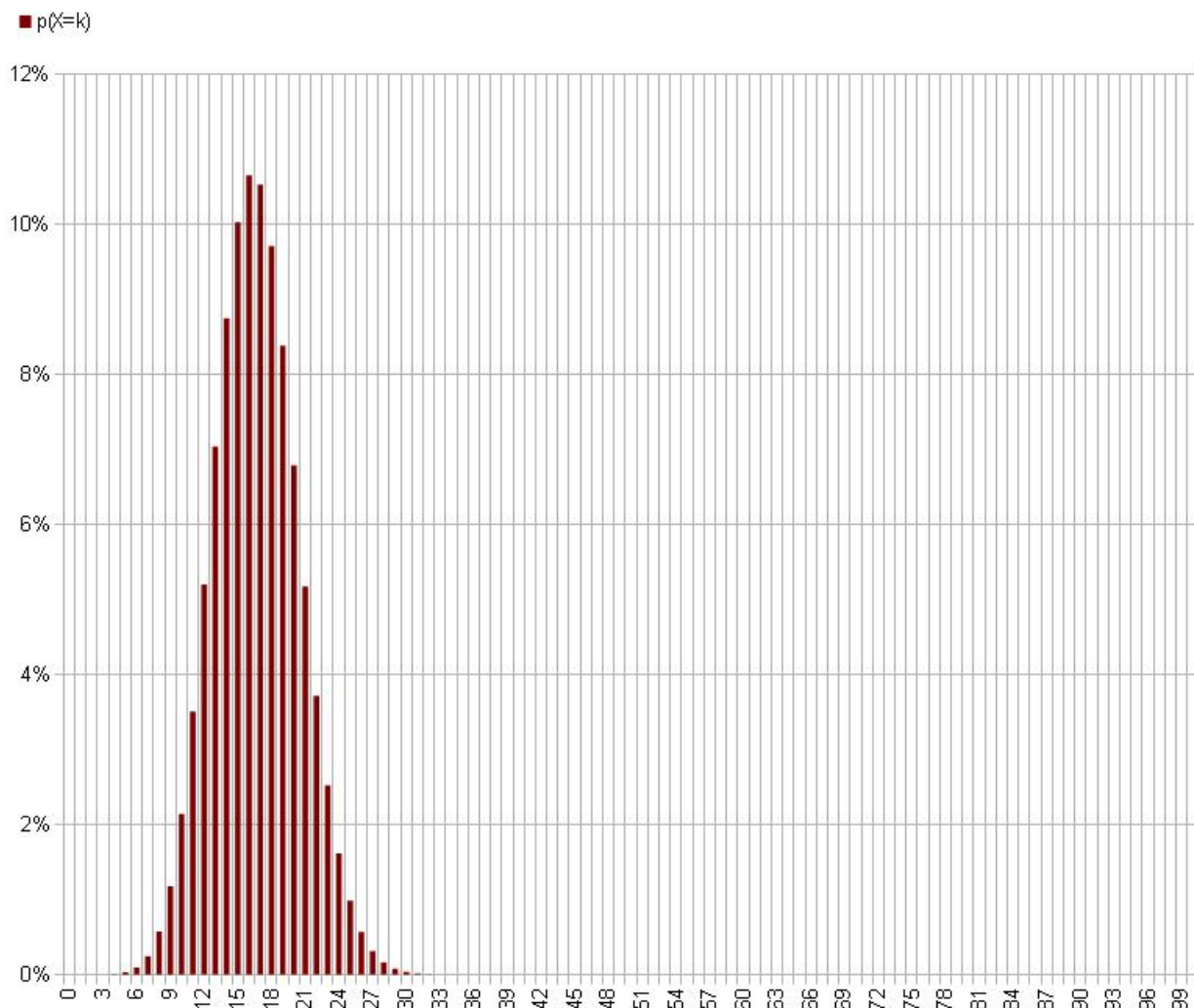


diagramme représentant la loi $\mathcal{B}(100, \frac{1}{6})$

remarque : certains bâtons ne sont pas visibles car leur hauteur est trop petite.

1. la somme des probabilités $p(X = k)$ pour k allant de 15 à 20 est environ égale à 56%

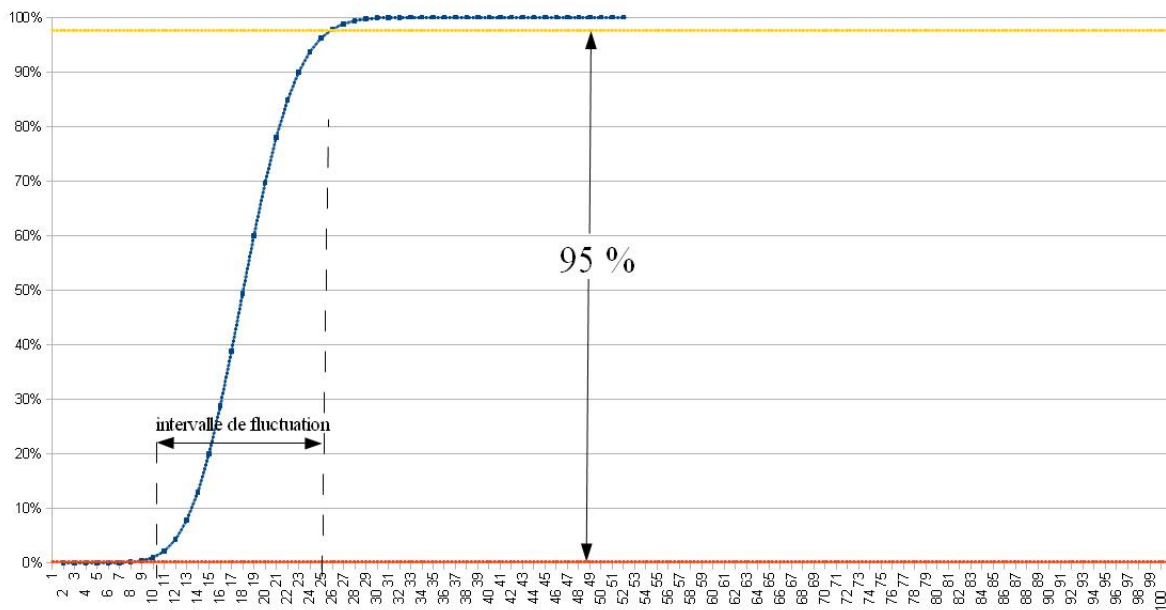


diagramme représentant les probabilités cumulées de la loi $\mathcal{B}(100, \frac{1}{6})$

Pour déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, on peut chercher l'intersection avec la probabilité 2,5% et l'intersection avec la probabilité 97,5%. L'intervalle restant correspond à une probabilité totale proche de 95%.

III - 2) prise de décision

Pierre fait l'expérience : il lance 100 fois un dé et obtient 28 fois le 6.

Or, 28 ne fait pas partie de l'intervalle de fluctuation déterminé précédemment (qui était $[10 ; 24]$).

On peut donc affirmer que son dé n'est pas équilibré, **au risque de 5% de se tromper**.

III - 3) cas des grands échantillons

On considère une population où la proportion d'un caractère est p comprise entre 0,2 et 0,8.

On considère un échantillon issu de cette population, échantillon de taille n , avec $n \geq 25$.

On note f la fréquence observée du caractère dans cet échantillon.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence observée peut être approximé par l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

Application :

On ne peut pas appliquer ce résultat à l'exemple décrit dans les paragraphes précédents de ce cours, car dans cet exemple, $p = \frac{1}{6} < 0,2$: on n'est pas dans les conditions d'application de la propriété.

On prend un autre exemple : on lance une pièce et on note si elle tombe sur PILE ou sur FACE.

La probabilité « théorique » pour que la pièce tombe sur PILE est $p = \frac{1}{2} = 0,5$.

On fait 100 essais : cela signifie que l'on prend un échantillon de taille $n = 100$.

On est bien dans les conditions d'application de la propriété précédente ($0,2 \leq p \leq 0,8$ et $n \geq 25$).

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% peut être approximé par : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, ce qui donne ici :

$$\left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] = [0,5 - 0,1; 0,5 + 0,1] = [0,4; 0,6]$$

C'est-à-dire que sur 100 lancers, on a 95% de chances d'obtenir entre 40 et 60 fois PILE.

Si on fait l'expérience et que l'on obtient moins de 40 PILE ou plus de 60 PILE, on pourra conclure (avec un risque d'erreur de 5%) que la pièce n'est pas bien équilibrée.