

Ex 1

1) FAUX:

les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y + 4$ sont les fonctions de la forme: $x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{4}{\frac{1}{2}}$ où $C \in \mathbb{R}$,

Soit $x \mapsto Ce^{\frac{x}{2}} - 8$, $C \in \mathbb{R}$

L'affirmation est donc fausse.

2) FAUX:

le nombre de possibilités d'équipe est $\binom{18}{3} \times \binom{14}{3} = 297\,024$

L'affirmation est donc fausse.

3) VRAI:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1 \leq \cos(n) + 2 \leq 3$$

La fonction inverse étant croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \cos(n)} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{n}{3} \leq \frac{n}{2 + \cos(n)}} \leq n \quad (\text{car } n \geq 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \text{ par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$$

Par comparaison, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2 + \cos(n)} = +\infty$

5) VRAI:

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3 \times 2 \times \cos(2x + \pi) = 6 \cos(2x + \pi)$$

$$\text{D'où } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 \cos(2\pi) = 6 \times 1 = 6. \text{ Par ailleurs } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin(2\pi) = 0$$

la tangente à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ a pour équation

$$y' = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ c'est-à-dire } y' = 6\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0$$

$$\text{D'où l'équation } \underline{y' = 6x - 3\pi}$$

(suite ex 1)

6) VRAI :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \cos(n) \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad \underline{(x-1)e^n + \cos(n) \leq (x-1)e^n + 1}$$

$$\text{Pour } x \in [0; 1[, \quad x < 1 \quad (\Rightarrow) \quad x-1 < 0$$

Sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, on en déduit, par produit, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x-1)e^n = -\infty, \text{ puis par somme, que } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x-1)e^n + 1 = -\infty$$

Par comparaison, on en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x-1)e^n + \cos(n) = -\infty$

4) VRAI :

h est affine donc de la forme $x \mapsto ax + b$ où a et b sont deux réels.

$$k(x) = x^4 + x^2 + h(x) \Rightarrow k'(x) = 4x^3 + 2x + a \Rightarrow \underline{k''(x) = 12x^2 + 2}$$

$$\text{Pour tout réel } x: x^2 > 0 \Rightarrow 12x^2 + 2 > 0 \quad (\Rightarrow) \quad \underline{k''(x) > 0}$$

k est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

7) VRAI : (u_n) est décroissante et minorée par 0, car $0 < u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_1 = \frac{1}{3} \times 10 + 2 = \frac{16}{3} < \frac{30}{3} = u_0 \quad \text{D'où } \underline{0 < u_1 < u_0}$$

démontrons par récurrence $\boxed{P(n) : 0 < u_{n+1} < u_n}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

→ initialisation : $P(0)$ a été démontrée ci-dessus.

→ hérédité : Soit k un entier naturel fixé (le temps de l'hérédité) tel que $P(k)$ soit vraie. Alors, on a :

$$0 < u_{k+1} < u_k \quad (\Rightarrow) \quad 0 \times \frac{1}{3} < \frac{1}{3} u_{k+1} < \frac{1}{3} u_k$$

$$\quad (\Rightarrow) \quad 0 + 2 < \frac{1}{3} u_{k+1} + 2 < \frac{1}{3} u_k + 2$$

$$\quad (\Rightarrow) \quad 2 < u_{k+2} < u_{k+1}$$

$$\quad \Rightarrow \quad 0 < u_{k+2} < u_{k+1}$$

$P(k+1)$ est donc vraie.

→ Conclusion : $P(n)$ est vraie au rang 0. Elle est héréditaire à partir de ce rang. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Ex 2 / Partie A

1) $u(t) = te^{-0,4t}$

u est de la forme $v \times w$

d'où $u'(t) = e^{-0,4t} + t \times (-0,4)e^{-0,4t} \Leftrightarrow u'(t) + 0,4te^{-0,4t} = e^{-0,4t}$

Pour tout t , on a donc $u'(t) + 0,4u(t) = e^{-0,4t}$

u est donc solution de $y' + 0,4y = e^{-0,4t}$

2) a) Soit g solution de (H). Alors pour tout réel t , $g'(t) + 0,4g(t) = 0$

or $g(t) = f(t) - u(t) \rightarrow g'(t) = f'(t) - u'(t)$

d'où $f'(t) - u'(t) + 0,4(f(t) - u(t)) = 0 \Leftrightarrow f'(t) + 0,4f(t) = u'(t) + 0,4u(t)$

puisque u est solution de (E), on a $u'(t) + 0,4u(t) = e^{-0,4t}$

on en déduit que $f'(t) + 0,4f(t) = e^{-0,4t}$ (pour tout réel t)

f est donc solution de (E).

b) $y' + 0,4y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,4y$

les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-0,4x}$ où C est un réel.

c) Si f est solution de (E), on a vu au a) que $g = f - u$ est solution de (H). Dire que f est solution de (E) équivaut à dire que $f - u$ est solution de (H).

$f - u$ est solution de (H) ssi il existe un réel C tel que :
pour tout réel t $f(t) - u(t) = Ce^{-0,4t} \Leftrightarrow f(t) = u(t) + Ce^{-0,4t}$

les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :

$t \mapsto te^{-0,4t} + Ce^{-0,4t} = (t+C)e^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$

d) La solution de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ est définie par $f(t) = (t+C)e^{-0,4t}$

avec $f(0) = C = 1$

D'où $f(t) = (1+t)e^{-0,4t}$

Ex 2 / Partie B

1. a) $f(t) = (t+1)e^{-0,4t}$ est de la forme $v \times w$ avec $(vw)' = v'w + vw'$
 D'où $f'(t) = 1 \times e^{-0,4t} + (t+1) \times (-0,4)e^{-0,4t} = (1 - 0,4t - 0,4)e^{-0,4t}$
 Soit $\underline{f'(t) = (-0,4t + 0,6)e^{-0,4t}}$

b) La fonction exponentielle étant strictement positive, $f'(t)$ est du signe de $-0,4t + 0,6$:

$$-0,4t + 0,6 > 0 \Leftrightarrow 0,6 > 0,4t \Leftrightarrow t < \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

D'où le tableau de variations de f .

t	0	$\frac{3}{2}$	6
signe de $f'(t)$	+	0	-
variations de f		$\nearrow f(\frac{3}{2})$	$\searrow 7e^{-2,4}$

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}e^{-0,6} \approx \underline{1,342}$$

$$f(6) = 7e^{-2,4} \approx \underline{0,635}$$

2. a) Sur $[0; \frac{3}{2}]$, f est croissante, d'où $f(t) \geq f(0) = 1$ et l'équation $f(t) = 0,7$ n'admet pas de solution.

Sur $[\frac{3}{2}; 6]$, f est strictement décroissante et elle est continue (comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$). On voit d'après le tableau de variations que $0,7 \in [f(\frac{3}{2}); f(6)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une solution unique pour l'équation $f(t) = 0,7$, sur $[\frac{3}{2}; 6]$. C'est l'unique solution de cette équation sur $[0; 4]$.

b) Une personne est en hypoglycémie si $f(t) < 0,7$.

on cherche une valeur approchée de la solution α de $f(t) = 0,7$ avec la calculatrice. on trouve $\alpha \approx 5,645$ (en heure).

À la minute près, on a $\underline{\alpha \approx 5 \text{ h } 37 \text{ min}}$

Ex 3

A. 1) C'est le nombre de 4-uplets d'éléments d'un ensemble à 64 éléments:

$$64^4 = 16\ 777\ 216$$

2) C'est le nombre de 4-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 64 éléments, soit: $\frac{64!}{(64-4)!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\ 249\ 024$

3) a) C'est le nombre de 4-uplets d'éléments d'un ensemble à 63 éléments, soit $63^4 = 15\ 752\ 861$

b) on soustrait au nombre total de séquences (64^4) le nombre de séquences qui ne contiennent pas A (63^4). D'où un nombre de séquences possibles comportant au moins une fois la lettre A: $64^4 - 63^4 = 1\ 024\ 255$

c) on peut placer le A à 4 emplacements distincts. Pour chaque placement du A, on peut lui associer 63^3 séquences possibles pour les 3 autres caractères. D'où un total de 4×63^3 séquences possibles, soit $\binom{4}{1} \times 63^3 = 1\ 000\ 488$

d) Pour placer les 2 A, on a $\binom{4}{2}$ choix possibles; pour les 2 autres caractères, on a 63^2 possibilités. D'où un nombre de séquences possibles égal à $\binom{4}{2} \times 63^2$, soit 23 814 séquences possibles.

B. 1) Pour cette loi binomiale, l'épreuve de Bernoulli est la transmission d'un caractère, répétée 250 fois, avec une probabilité de "succès" (caractère mal transmis) égale à 0,01.
D'où $X \sim \mathcal{B}(250; 0,01)$

2) on calcule $P(X=0) = (1-0,01)^{250} = 0,99^{250} \approx 0,081$

3) on calcule $P(X > 16) = 1 - P(X \leq 16) \approx 1,04 \times 10^{-9}$

Cette probabilité étant très faible, on peut effectivement affirmer que la probabilité d'avoir plus de 16 caractères mal transmis est négligeable.

Ex 4

A 1) $u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 3,6$

2) on note $P(n)$: $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ pour tout entier $n > 0$

→ initialisation: pour $n=1$ $10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 = 2 = u_1$
la propriété $P(1)$ est donc vraie

→ hérédité: Soit k un entier strictement positif tel que $P(k)$ est vraie:
 $u_k = 10 - 8 \times 0,8^{k-1} \Leftrightarrow 2 + 0,8u_k = 2 + 0,8(10 - 8 \times 0,8^{k-1})$
 $\Leftrightarrow u_{k+1} = 2 + 8 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{k-1}$
 $\Leftrightarrow \underline{u_{k+1} = 10 - 8 \times 0,8^k}$

$P(k+1)$ est donc vraie.

→ Conclusion: La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang. Par principe de récurrence, elle est donc vraie à partir du rang 1: $\underline{u_k = 10 - 8 \times 0,8^{k-1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = 0$ car il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $] -1; 1[$.

Par produit, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \times 0,8^{n-1} = 0$, puis par somme:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10 - 0 = 10$$

Dans le contexte de l'exercice: après un grand nombre d'heures de traitement, la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient sera proche de 10 ml.

4) $u_n > 10 \Leftrightarrow 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 10 \Leftrightarrow 8 \times 0,8^{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow 0,8^{n-1} \leq 0$
Cela n'est pas possible car $0,8 > 0$.

Cette inéquation n'admet donc pas de solution.

Dans le contexte de l'exercice: la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient ne dépassera jamais 10 ml.

5) $u_n > 9 \Leftrightarrow 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9 \Leftrightarrow \frac{1}{8} > 0,8^{n-1} \Leftrightarrow 0,8^n < 0,1$

En utilisant la calculatrice, on voit que:

- pour $n \leq 10$, $0,8^n > 0,1$

- pour $n = 11$, $0,8^n \approx 0,086 < 0,1$

A partir de 11 prises de médicament, la quantité présente dans l'organisme dépassera 11 ml.

Ex4 - B

1) $S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = 2,8$

2) Comme somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a:

$$0,8^0 + 0,8 + 0,8^2 + \dots + 0,8^{n-1} = \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} = \frac{1 - 0,8^n}{0,2} = 5 \times (1 - 0,8^n)$$

D'où $u_1 + \dots + u_n = 10 \times n - 8 \times (0,8^0 + \dots + 0,8^{n-1}) = 10n - 8 \times 5 (1 - 0,8^n)$
 $= \underline{10n - 40 + 40 \times 0,8^n}$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ (suite géométrique de raison dans $] -1, 1[$)

on a $S_n = \frac{10n - 40 + 40 \times 0,8^n}{n} = 10 - \frac{40}{n} + 40 \times \frac{0,8^n}{n}$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par produit, on a donc $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0,8^n}{n} = 0 \end{cases}$

Par somme, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 10}$

4) La valeur renvoyée par "mystere(9)" correspond à la durée (nombre d'heures) à partir de laquelle la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme au cours du temps dépassera le seuil de 9 mg.

5) on sait que (S_n) est croissante. Pour $n=10$, on a $S_{10} = \frac{10 \times 10 - 40 + 40 \times 98^{10}}{10}$
on trouve que $S_{10} \approx 6,43 < 9$.

Puisque (S_n) est croissante; pour tout $n \leq 10$, on a $S_n \leq S_{10} < 9$.

Pour dépasser le seuil de 9 mg, il faut donc que $n > 10$.