

∞ Bac Blanc Spécialité Mathématiques ∞

Mercredi 7 janvier

Calculatrice autorisée en mode examen

Exercice 1

7 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \frac{1}{2}y + 4.$$

Affirmation 1 : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} - 2, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.

On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

Affirmation 2 : Il y a 906 192 possibilités pour former une telle équipe.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}.$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4. On considère une fonction affine h définie sur $\mathbb{R}$.

On note k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.

Affirmation 4 : La fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \sin(2x + \pi)$ et C sa courbe représentative dans un repère donné.

Affirmation 5 : Une équation de la tangente à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est

$$y = 6x - 3\pi.$$

6. Soit x donné dans $[0; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x - 1)e^n + \cos(n).$$

Affirmation n° 6 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

7. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

Affirmation 7 : La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.

Exercice 2

5 points

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 0,4y = e^{-0,4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t .

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = te^{-0,4t}$.

Vérifier que u est solution de (E) .

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$.

- Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) . On admettra que la réciproque est vraie.
- Résoudre l'équation différentielle (H) .
- En déduire les solutions de (E) .
- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en g.L^{-1} , en fonction du temps t , exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par :

$$f(t) = (t + 1)e^{-0,4t}.$$

- Montrer que, pour tout $t \in [0; 6]$, $f'(t) = (-0,4t + 0,6)e^{-0,4t}$.
 - Étudier les variations de f sur $[0; 6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
- Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0,7 \text{ g.L}^{-1}$.
 - Démontrer que sur l'intervalle $[0; 6]$ l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution que l'on notera α .
 - Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie?
On exprimera ce temps à la minute près.

Exercice 3

4 points

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
 - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
 - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
 - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Exercice 4

4 points

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et

pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2 .
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions?

Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n.$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```
1 def mystere(k) :  
2     n = 1  
3     s = 2  
4     while s < k :  
5         n = n + 1  
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n  
7     return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.