

~ Mardi 16 décembre ~

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

proposition de corrigé

EXERCICE 1

3 points

Déterminer les limites suivantes (les réponses doivent être détaillées, pas de réponse sèche) et préciser dans chaque cas si la représentation graphique de la fonction proposée admet une asymptote (dont on précisera l'équation) :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 1}$

$$\frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 1} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 1 ; par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 1} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x - 1}$

$$\frac{e^x}{x - 1} = \frac{e^x}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x - 1} = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 - 1}$

Pour tout nombre réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Pour $x < -1$, $x^2 - 1 > 0$ et on divise ces inégalités par $x^2 - 1$; cela donne :

$$-\frac{1}{x^2 - 1} \leq \frac{\sin(x)}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{x^2 - 1}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$, on en déduit, par le théorème d'encadrement, que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 - 1} = 0$$

EXERCICE 2

8 points

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli. Les épreuves sont indépendantes deux à deux. La probabilité du succès est $p = 0,4$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $10; 0,4$: $X \sim \mathcal{B}(10; 0,4)$.

2. a. $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8 \approx 0,1209$

- b. Comme les évènements $\{X = i\}$ et $\{X = j\}$ sont disjoints pour $i \neq j$:

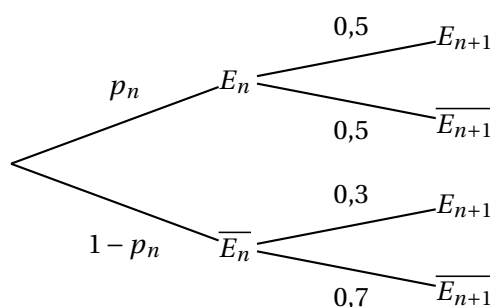
$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}) \\ &= \sum_{i=0}^2 P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i} \\ &\approx 0,1673 \end{aligned}$$

La probabilité que le phénomène El Niño soit dominant au plus deux années sur une période de 10 ans est d'environ 0,1673.

3. Comme X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,4)$: $E(X) = n \times p = 10 \times 0,4 = 4$. En moyenne le phénomène El Niño est dominant quatre années sur une période de 10 ans.

Partie B

- 1.



2. $p_0 = 0$

$$1 - p_0 = 1$$

$$p_1 = P(E_1) = P(E_0) \times P_{E_0}(E_1) + P(\overline{E_0}) \times P_{\overline{E_0}}(E_1) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 = 0,3$$

3. $p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$
 $= p_n \times 0,5 + (1 - p_n) \times 0,3 = 0,2 \times p_n + 0,3$

4. a. En utilisant la calculatrice la suite (p_n) semble être croissante et avoir pour limite 0,375.

n	p_n
0	0
1	0,3
2	0,36
3	0,372
$\vdots$	$\vdots$
13	0,374 999 999 692 8
14	0,374 999 999 938 56

- b. On formule l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(n) : p_n \leq 0,375$.

On vérifie que $\mathcal{H}(0)$ est vraie (initialisation).

Comme $p_0 = 0 \leq 0,375$, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Montrons que $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$ (hérédité).

On suppose que $\mathcal{H}(n)$ est vraie, avec $n \in \mathbb{N}$.

$$p_{n+1} = 0,2 \times p_n + 0,3$$

D'après $\mathcal{H}(n)$, $p_n \leq 0,375$, en multipliant par 0,2 on obtient :

$$0,2 \times p_n \leq 0,075, \text{ en ajoutant } 0,3 \text{ on obtient :}$$

$$0,2 \times p_n + 0,3 \leq 0,375, \text{ ainsi on obtient :}$$

$$p_{n+1} \leq 0,375 \text{ (}\mathcal{H}(n+1) \text{ est vérifiée)}$$

D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0, p_n \leq 0,375$$

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désignant une probabilité est un nombre positif.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$p_{n+1} - p_n = -0,8 \times p_n + 0,3$$

$$p_{n+1} - p_n \geq -0,8 \times 0,375 + 0,3$$

$$p_{n+1} - p_n \geq 0$$

Ceci étant valable quelque soit le choix de n , $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} - p_n \geq 0$, donc (p_n) est croissante.

- d. (p_n) est croissante et majorée donc (p_n) est convergente vers l . De plus $l \leq 0,375$.

5. a.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{8} \\ &= 0,2 \times p_n + 0,3 - \frac{3}{8} \\ &= 0,2 \times p_n + 0,2 \times \frac{3}{2} - 0,2 \times \frac{15}{8} \\ &= 0,2 \times p_n + 0,2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{8} \right) \\ &= 0,2 \times p_n + 0,2 \times \left(-\frac{3}{8} \right) \\ &= 0,2 \times \left(p_n - \frac{3}{8} \right) \end{aligned}$$

Finalement quel que soit n naturel, $u_{n+1} = 0,2 \times u_n$: ceci prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

$$u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$$

Le premier terme est donné par : $u_0 = -\frac{3}{8}$

- b. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 de premier terme $u_0 = -\frac{3}{8}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = -\frac{3}{8} \times 0,2^n$$

$$\text{Comme } \forall n \in \mathbb{N} : u_n = p_n - \frac{3}{8},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : p_n = -u_n + \frac{3}{8} = (-0,2^n + 1) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} (1 - 0,2^n)$$

- c. Comme $0,2 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{8}$

- d. La probabilité d'observer un phénomène El Niño dominant tend vers $\frac{3}{8}$ quand le nombre d'années d'observation augmente.

EXERCICE 3

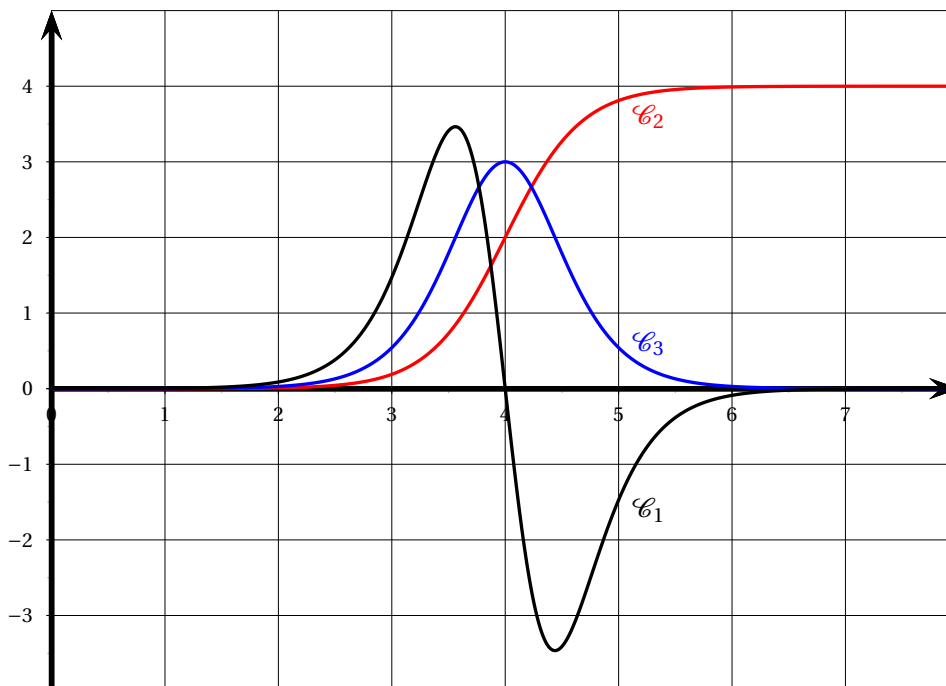
4 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f'' .



Partie A

1. La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, si c'était la dérivée d'une fonction, cette fonction serait strictement croissante or aucune des deux autres fonctions n'est strictement croissante. Cette fonction ne peut pas être la dérivée d'une des deux autres, c'est donc la fonction f .

f étant strictement croissante, sa dérivée est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donc la fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_3$

Et par élimination, $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f'' (On vérifie que f' est croissante sur $] -\infty ; 4]$ et décroissante sur $[4 ; +\infty[$ ce qui coïncide avec le signe de $f''(x)$ qui est positive sur $] -\infty ; 4]$ et négative sur $[4 ; +\infty[$).

$\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f'' .

$\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction f .

$\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction f' .

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$, courbe représentative de la fonction f , au point d'abscisse 4 est égal à $f'(4)$ soit 3 par lecture graphique.
3. La courbe $\mathcal{C}_2$ semble présenter un point d'inflexion à l'abscisse 4.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -kx = +\infty$ car $k > 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-kx} = +\infty$

d'où, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-kx} = +\infty$

et donc, par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1 + e^{-kx}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -kx = -\infty$ car $k > 0$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$

d'où, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-kx} = 1$

et donc, par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + e^{-kx}} = 4$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur ce même intervalle.

g est de la forme $4 \times \frac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-kx}$. On a $u'(x) = -ke^{-kx}$.

$$g' = 4 \times \frac{-u'}{u^2} \text{ donc, pour tout réel } x, g'(x) = 4 \times \frac{ke^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}$$

$$\text{On a donc : } g'(0) = \frac{4ke^0}{(1 + e^{-k0})^2} = \frac{4k}{2^2} = k$$

3. La courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse x si et seulement si g'' s'annule en changeant de signe en x . Il faut donc étudier le signe de $g''(x)$.

$$\text{Pour tout réel } x, g''(x) = -4e^{kx} (e^{kx} - 1) \frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3}.$$

Une exponentielle est strictement positive et k est un réel strictement positif, donc, pour tout réel x , $4e^{kx} \frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3} > 0$.

Le signe de $g''(x)$ est donc le signe de $-(e^{kx} - 1) = 1 - e^{kx}$

$$1 - e^{kx} > 0 \iff 1 > e^{kx} \iff 0 > kx \iff 0 > x \text{ car } k > 0.$$

$g''(x)$ est donc strictement positive sur $] -\infty ; 0[$, s'annule en 0 et strictement négative sur $]0 ; +\infty[$.

g admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 0.