

∞ Bac Blanc Spécialité Mathématiques ∞

Lundi 27 avril

Calculatrice autorisée en mode examen

Exercice 1

4 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1.
 - a. Démontrer que $u_1 = 12$.
 - b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 - c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.
 - a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
 - b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction?

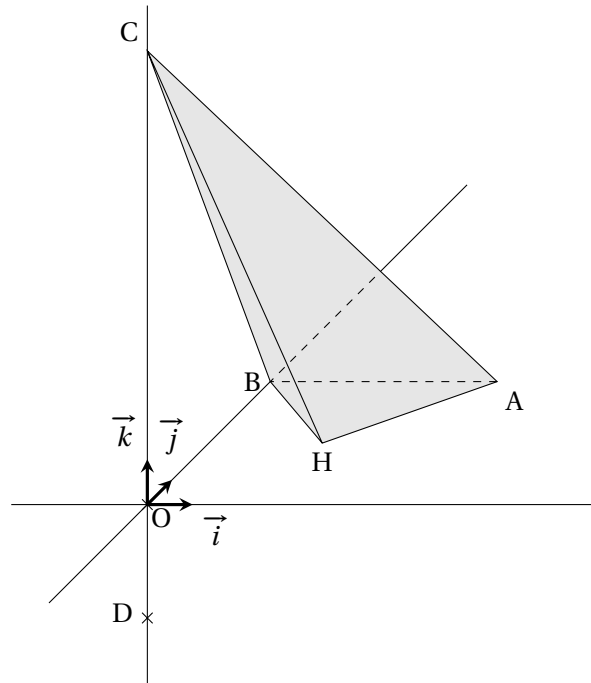
```
def suite() :  
    u = 3  
    n = 0  
    while ... :  
        u = ...  
        n = n + 1  
    return n
```

Exercice 2

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(5; 5; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 10)$ et $D(0; 0; -\frac{5}{2})$.



1. a. Montrer que $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).
 b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite \mathcal{D} de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$.

- a. On admet que la droite \mathcal{D} et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0)$.
 - b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).
3. a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.
 b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.
 4. a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.
 b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
 5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Exercice 3

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les cinq questions sont indépendantes.

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.

Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.

Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse?
 - a. 1
 - b. 0,870
 - c. 0,600
 - d. 0,599

2. La probabilité $p(3 < X \leq 7)$ est égale à :
 - a. $p(X \leq 7) - p(X > 3)$
 - b. $p(X \leq 7) - p(X \leq 3)$
 - c. $p(X < 7) - p(X > 3)$
 - d. $p(X < 7) - p(X \geq 3)$

3. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?
 - a. 2
 - b. 3
 - c. 4
 - d. 5

Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

4. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?
 - a. $0,04^n$
 - b. $0,96^n$
 - c. $1 - 0,04^n$
 - d. $1 - 0,96^n$

5. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle?

```
def seuil (x) :  
    n=1  
    while 1-0.96**n < x :  
        n = n + 1  
    return n
```

- Le plus petit nombre n tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x .
- Le plus petit nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x .
- Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à x .
- Le plus grand nombre n tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à x .

Exercice 4

6 points

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.

On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f . Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

- Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geq 1$.
- La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + y = 5e^{-t},$$

d'inconnue y , où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $u(t) = ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
Déterminer l'expression de la fonction f .

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.
3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} des réels t_1 et t_2 .
4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.
Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament?

Partie D : concentration moyenne

La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par :

$$T_m = \int_0^1 f(t) dt$$

où f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

Calculer cette concentration moyenne.

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.