Bac Blanc 27/01

Ex 1

$u_0 = 3 \qquad u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$

1 a) $u_1 = 5u_0 - 4\times 0 - 3 = 5\times 3 - 3 = 12$

b) $u_2 = 5u_1 - 4\times 1 - 3 = 5\times 12 - 4 - 3 = 53$

c) On peut conjecturer qu'elle est croissante et diverge vers $+\infty$.

2 a) • $u_0 = 3 \geq 0+1$ : initialisation validée

• Supposons que pour un n fixé, $u_n \geq n+1$, alors :

$$5u_n \geq 5(n+1) = 5n+5$$

$$5u_n - 4n - 3 \geq 5n+5-4n-3 = n+2$$

$$u_{n+1} \geq (n+1)+1$$

La propriété est bien héréditaire

• Valable pour $n=0$ et héréditaire, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) comme $\lim n+1 = +\infty$, par comparaison, $\lim u_n = +\infty$

3 a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$

$= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1$

$= 5u_n - 5n - 5$

$= 5(u_n - n - 1) = 5v_n$ : $(v_n)$ est géométrique de raison 5.

$v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$ de premier terme 2.

b) on a alors : $v_n = 2 \cdot 5^n$

c) et : $u_n = v_n + n + 1$

donc : $u_n = 2 \cdot 5^n + n + 1$

d) $u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 5^{n+1} + n + 2 - 2 \cdot 5^n - n - 1$

$= 2 \cdot 5^n (5 - 1) + 1$

$= 8 \cdot 5^n + 1 > 0$

ainsi, $(u_n)$ est croissante.

4 a)

```
def suite():
    u = 3
    n = 0
    while u < 10**7:
        u = 5*u - 4*n - 3
        n = n + 1
    return n
```

b) la première valeur de $n$ telle que $u_n \geq 10^7$ est $n = 10$, valeur renvoyée par le programme.

Ex2

1 a) $C\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$

$C\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\0\\-5/2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-12{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CA} = 5-5+0 = 0$

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD} = 0+0+0 = 0$

$\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) : c'est bien un vecteur normal à ce plan.

1b) (CAD) a pour équation : $x-y+d=0$

$C \in (CAD)$ donc : $0-0+d=0 \iff d=0$

(CAD) a bien pour équation $x-y=0$

2 a) $H\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{D} \cap (CAD) \iff \begin{cases} x = 5/2\, t \\ y = 5-5/2\, t \\ z = 0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

ainsi : $5/2\, t - 5 + 5/2\, t = 0 \iff t = 1$

et donc : $\begin{cases} x = 5/2 \\ y = 5-5/2 = 5/2 \\ z = 0 \end{cases}$

Conclusion : $H\begin{pmatrix}5/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$

b) $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ; $B \in (\mathcal{D})$

$(\mathcal{D})$ est donc orthogonale au plan (CAD).

Ainsi, H est le projeté orthogonal de B sur (CAD)

3 a) $H\begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H\begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = 5/2 \times (-5/2) + 5/2 \times 5/2 = 0$$

donc $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{HB}$. ABH est bien rectangle en H.

b) $$\mathcal{A}_{ABH} = \frac{AH \times BH}{2}$$

$$AH^2 = (5/2)^2 + (5/2)^2 = 25/2$$

$$BH^2 = 25/2$$

$$\mathcal{A}_{ABH} = \frac{5/\sqrt{2} \times 5/\sqrt{2}}{2} = \frac{25/2}{2} = \frac{25}{4}$$

4 a) On doit montrer que : * $O \in (ABH)$

* $(CO)$ orthogonale au plan $(ABH)$

* $O \in (ABH)$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

On constate que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires.
O, A et H sont alignés donc $O \in (AH)$
et donc $O \in (ABH)$

* $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -5/2 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AH} = 0$

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{OC}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs de (ABC) donc $\overrightarrow{OC}$ orthogonal au plan (ABC)

ainsi : (OC) est bien la hauteur issue de C du tétraèdre [ABCH].

4 b) $\mathcal{V} = \frac{1}{3} B h = \frac{1}{3} A_{ABM} \times CO$

$CO^2 = 0^2 + 0^2 + 10^2$
$= 100$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{25 \times 5}{6}$$

$$\mathcal{V} = \frac{125}{6}$$

5. $\mathcal{V} = \frac{1}{3} B h$ avec $B = A_{ABC}$

$h = d(H, (ABC))$

$$A_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{5 \times \sqrt{125}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi : $\frac{125}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{5}}{2} d$

$$d = \frac{125}{25\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Ex 3

1) b

2) b

3) a

4) a

5) a

Ex4

Partie A

1) $t = 1$ h   2) $f(t) \geqslant 1$ : $S = [0{,}25 ; 2{,}5]$

3) $f$ concave sur $[0 ; 2{,}6]$ puis convexe sur $[2{,}6 ; 8]$

Partie B

1) $y' + y = 0$   $S = \{t \mapsto Ce^{-t}, C \in \mathbb{R}\}$

2) $u(t) = ate^{-t}$   $u'(t) = ae^{-t} - ate^{-t}$

$u$ solution de $(E)$ $\iff ae^{-t} - ate^{-t} + ate^{-t} = 5e^{-t}$

$\iff ae^{-t} = 5e^{-t} \iff a = 5$

donc $u(t) = 5e^{-t}$ est solution particulière de $(E)$.

3) Ainsi : $S = \{t \mapsto 5te^{-t} + Ce^{-t}, C \in \mathbb{R}\}$

4) $f(0) = 0 \iff 5 \times 0\, e^{-0} + Ce^{-0} = 0 \iff C = 0$

Ainsi : $f(t) = 5te^{-t}$

Partie C

1) $f(t) = 5te^{-t}$   En $(+\infty)$, par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$

Cela signifie que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale.

2) $f'(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t} = 5e^{-t}(1 - t)$

Et

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| var $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $5e^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

$f(1) = 5e^{-1}$

3 - On se place sur $[0, 1]$

- $f$ est continue
- $f$ est croissante
- $f(0) = 0$ et $f(1) > 1$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.

On fait de même sur $[1 ; +\infty[$

À l'aide de la calculatrice : $t_1 \simeq 0,26$
$t_2 \simeq 2,54$

4 - Cette durée vaut environ $2,54 - 0,26 = 2,28$ h
ce qui donne 2h 16min 48s.

Partie D

$$T_m = \int_0^1 5 t e^{-t} dt \qquad \begin{array}{ll} u(t) = t & v'(t) = e^{-t} \\ u'(t) = 1 & v(t) = -e^{-t} \end{array}$$

$$= 5\left( \left[ -t e^{-t} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt \right)$$

$$= 5 \left( -e^{-1} + \left[ -e^{-t} \right]_0^1 \right)$$

$$= 5 \left( -e^{-1} - e^{-1} + 1 \right) = 5 \left( 1 - 2e^{-1} \right)$$

$$T_m = 5 \left( 1 - 2e^{-1} \right)$$

$$T_m \simeq 1,32$$