SUJET NATIONAL (Europe–Afrique–Asie)

Deuxième exercice

Toutes séries

Le plus court possible

Énoncé

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n° 1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

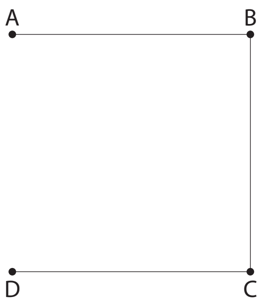

fig. 1
Assistant n° 1

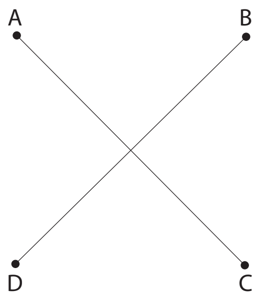

fig. 2
Assistant n° 2

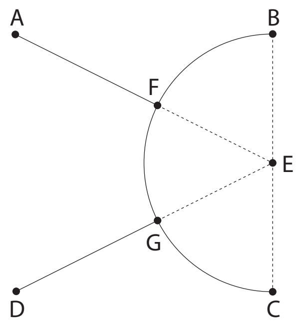

fig. 3
Assistant n° 3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

   Si $EF = 20$ km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

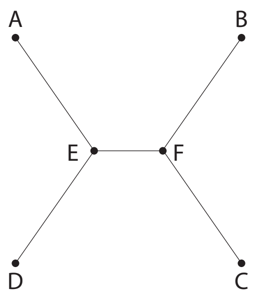

fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :
Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
on a toujours $AB + BC \geqslant AC$;
on a l'égalité $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.
   On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de côté, comme dans le dessin suivant.

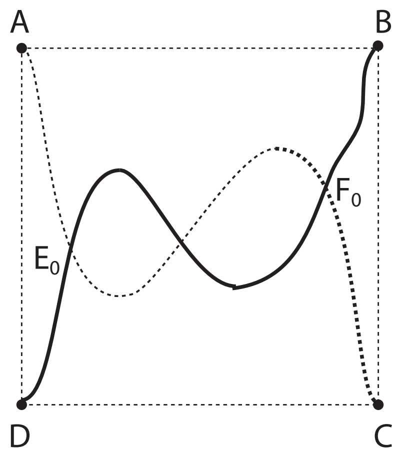

fig. 5

   On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.
   En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*)

   Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*)

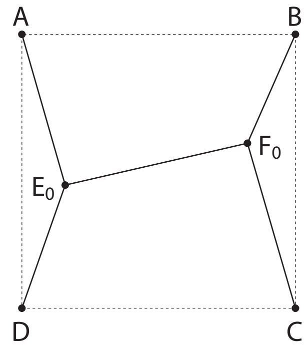

fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

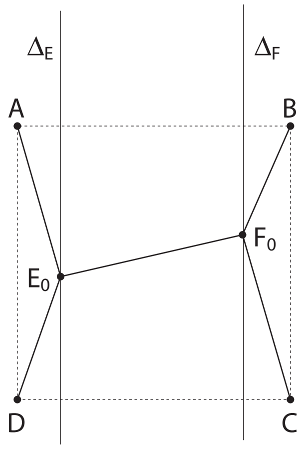

fig. 7

a) Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances $DE + EA$ soit minimale. On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b) Montrer que $EF \leqslant E_0F_0$.

c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

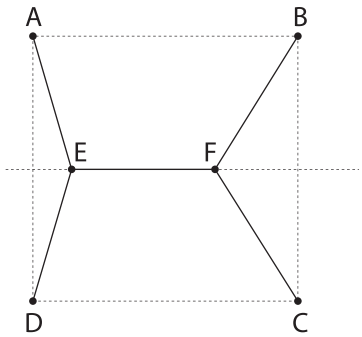

fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

   a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

   b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (fig. 4). Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

   c) Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

Éléments de solution

Partie A

1. C'est l'assistant n° 3. En effet :
   La longueur du réseau routier de l'assistant n° 1 mesure 300 km.
   Celle de l'assistant n° 2 mesure $200\sqrt{2} \approx 282{,}8$ km (la diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$ qui se trouve avec le théorème de Pythagore).
   Celle de l'assistant n° 3 mesure $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi \approx 280{,}7$ km. ABE est rectangle en B donc $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 12\,500$ donc $AE = \sqrt{12\,500} = 50\sqrt{5}$.
   Puisque FE est le rayon du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BC] d'où $AF = AE - FE = 50\sqrt{5} - 50$. D'autre part, le demi-cercle mesure $\dfrac{2\pi \times 50}{2} = 50\pi$. Ce qui donne une longueur totale de $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi$.
2. Oui, car il fait $20 + 4 \times \sqrt{50^2 + 40^2} = 20 + 40\sqrt{41} \approx 276{,}1$ km.