Exercice 1

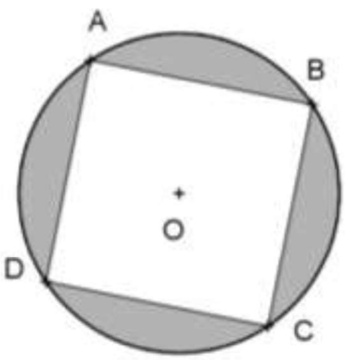
Sommes de chiffres

Dans cet exercice, les nombres considérés sont des entiers écrits selon la numération décimale.
Pour cet exercice, on appelle ***poids*** d'un nombre N la somme de ses chiffres.

1. Quel est le poids du nombre 29 ? Quel est le poids du nombre $7\ 646$?
2. Proposer trois nombres différents de même poids 42.
3. Est-il exact de dire que « plus un nombre a de chiffres, plus son poids est élevé » ?
4. Quel est le plus petit nombre de poids 50 ?
5. Quel est le plus petit nombre de poids $2\ 022$?
6. Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 5 et des 7 et dont le poids soit 53 ?
7. Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 3 et des 6 et dont le poids soit 200 ?

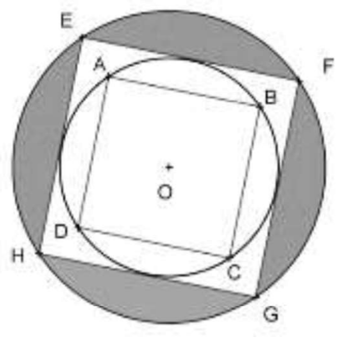
Exercice 2

Carré inscrit dans un cercle inscrit dans un carré…



L'unité de longueur est le cm.
Attention : les figures données ne sont pas à la même échelle.
Tous les résultats numériques demandés sont attendus en valeur exacte.

Sur la figure ci-contre est représenté le cercle $\mathcal{C}_1$, de centre O et de rayon 2.
Les segments [AC] et [BD] sont deux diamètres perpendiculaires de ce cercle.
1. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
On dit que le cercle $\mathcal{C}_1$ est le cercle circonscrit au carré ABCD.
2. Quelle est l'aire de la partie grisée de la figure ?



On considère le carré EFGH Dont les côtés sont parallèles à ceux de ABCD et tangents au cercle $\mathcal{C}_1$. On dit que le cercle $\mathcal{C}_1$ est inscrit dans le carré EFGH. On considère de même que précédemment le cercle $\mathcal{C}_2$ circonscrit au carré EFGH. La figure ci-dessous représente cette situation.
3. Calculer l'aire de la partie grisée sur cette nouvelle figure.
4. Sur le même principe, on peut construire une nouvelle figure avec un cercle $\mathcal{C}_3$ circonscrit à un nouveau carré IJKL dont les côtés seraient tangents à $\mathcal{C}_2$ et parallèles aux côtés du carré EFGH. Quelle est, sur cette nouvelle figure, l'aire comprise entre le cercle $\mathcal{C}_3$ et les côtés du carré IJKL ?

Exercice 3

Triplets pythagoriciens

Une unité de longueur est donnée dans le plan. Un triangle ABC a pour côtés $\mathrm{AB} = 8, \mathrm{AC} = 15$ et $\mathrm{BC} = 17$.
1. Montrer que ce triangle est rectangle, en indiquant quel point est le sommet de l'angle droit.

Plus généralement, on s'intéresse aux triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières. On pose $\mathrm{AB} = m$, $\mathrm{AC} = n$ et $\mathrm{BC} = p$. On fait l'hypothèse que $m < n < p$ et on dit que le *triplet* (m, n, p) est *pythagoricien*.

Corde à 13 nœuds et triangle égyptien

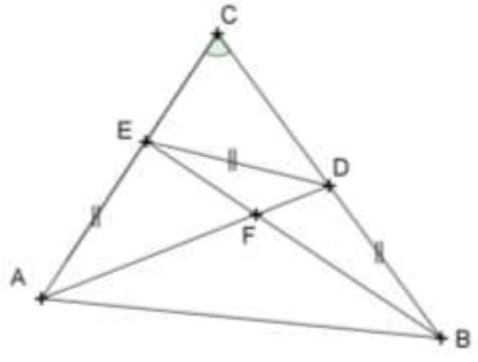
2. ***a.*** Si (m, n, p) est un triplet pythagoricien, quel point est le sommet de l'angle droit du triangle rectangle ABC associé ?
b. Montrer que $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien. Les triangles associés sont les « triangles égyptiens ».
c. Montrer que, si le triplet $(m, n, 5)$ est pythagoricien, alors $m = 3 \ et \ n = 4$.

La tablette Plimpton 322 (Université Columbia, New-York) témoigne de recherches conduites par des Babyloniens.

3. On suppose que le triplet $(5, n, p)$ est pythagoricien.
a. Montrer que $(p - n)(p + n) = 25$.
b. Comparer $p + n$ et $p - n$ et en déduire leurs valeurs puis finalement les valeurs de p et de n. Le triangle associé est dit « babylonien ».
4. Existe-t-il des entiers m et p tels que le triplet $(m, 5, p)$ soit pythagoricien ?

Exercice 4

Angle inconnu



L'angle en C du triangle ABC mesure 70°. On a placé sur le côté [BC] le point D et sur le côté [AC] le point E tels que :
$\mathrm{BD} = \mathrm{DE} = \mathrm{EA}$. Les segments [BE] et [AD] se coupent en F.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AFB}}$?