La naissance des probabilités : le problème des partis

Le problème donné aux élèves

Travail par groupes de quatre

Consignes

- Un temps de recherche silencieuse (environ 1/4h)
- Mise en commun dans chaque groupe des méthodes de résolution du problème
- Chaque groupe rédige sur feuille la (ou les) solutions(s) pour la **première** question **AVANT** de chercher les autres situations.
- Traitement semblable des autres questions.

Un problème de partage

Première situation : Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de « pile ou face ». Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui a 3 points est le vainqueur du jeu et il gagne 64 euros (cette somme s'appelle la « mise »).

Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand ils s'arrêtent, Ariane a gagné deux parties (elle a donc 2 points) et Bernard une partie (il a donc 1 point). Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée.

Mais alors, comment partager la mise, c'est-à-dire que donner à Ariane et Bernard pour que le partage soit équitable ?

Quel partage proposez-vous et pourquoi ?

Deuxième situation : La règle du jeu est la même. Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points. Quel partage proposez-vous si, au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard a 0 point ?

Troisième situation : le premier qui obtient 8 points est le vainqueur du jeu. Au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard a 0 point. Quel partage proposez-vous ?

3c) Étant donné qu'il y a eu 3 victoires au total, il y a donc eu 3 parties. Arianne, elle, a gagné $\frac{2}{3}$ des parties et Bernard $\frac{1}{3}$ des parties alors Arianne remporte $\frac{2}{3}$ du gain et Bernard remporte $\frac{1}{3}$ du gain.

Soit G_A le gain de Arianne et G_B le gain de Bernard.

$G_A = \frac{2}{3} \times 64 = 42,67$. $G_B : 21,33$

Donc Arianne va obtenir 42,67 € et Bernard va obtenir 21,33 €.

1ere méthode :

On a 2 partages possibles, soit Ariane gagne deux fois plus que Bernard car elle a deux fois plus de points.

$\frac{64}{3} \times 2 = 42,6$ € pour Ariane

$64 - 42,6 = 21,4$ € pour Bernard

Avant de s'arrêter, Ariane et Bernard ont joué 3 parties. Nous avons donc décidé de partager la somme en 3. Chaque point gagné vaut $\frac{1}{3}$ de la somme.

Ariane ayant gagné 2 parties Elle se retire avec $\frac{2}{3}$ de la somme soit $64 \times \frac{2}{3} = 42,66$ €. Et Bernard part avec $64 \times \frac{1}{3} = 21,33$ €.

Or, la deuxième situation nous permet d'affirmer que le raisonnement de la première situation est faux.
Puisque Ariane gagne 1 partie et Bernard n'en gagne aucune, en suivant ce raisonnement Ariane obtiendrait toute la mise sans avoir joué entièrement le jeu, et Bernard perdrait la totalité de la somme alors qu'il a encore des chances de gagner

2) Étant donné que Juliane a gagné 2 parties et que Bernard une seule, la mise est divisée en 2/3 - 1/3.

C'est donc cette solution choisie puisque si l'on prend l'autre solution (la deux dans la situation 1), le partage serait de 100% - 0%, ce qui n'est pas équitable étant donné que la partie n'est pas terminée et que tous les points ne sont pas comptés.

Luca Pacioli

Luca Pacioli avec son élève Guidobaldo Ier de Montefeltro (1495), attribué à Jacopo de Barbari, musée Capodimonte de Naples
Source : Wikipedia

Pacioli: né vers 1445 à Borgo San Sepolcro (Toscane) et mort en 1517 à Rome.

Professeur public de mathématiques à Perouse à partir de 1475.

La *Summa de arithmetica* (1494) est l'adaptation en langue vernaculaire des œuvres de Léonard de Pise.

En 1509, il écrit la *Divinae Proportionae*.

Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportionii et proportionalita,* Venise, 1494.

(Traduction libre)

Une brigade joue à la paume: il faut 60 pour gagner, chaque coup vaut 10. L'enjeu est de 10 ducats. Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20. On demande quelle est la part qui revient à chaque camp.

Dans ce cas, j'ai trouvé diverses opinions d'un côté comme de l'autre. ..Mais la vérité et ce que je dirai est la voie droite. Je dis que je peux le faire de trois manières.

…..

La troisième façon est la plus brève. On fait la somme de ce qu'ils ont tous les deux, c'est-à-dire 50 et 20, qui font 70. Et ces 70 gagnent 10. Et de là combien revient à celui qui a 50 et à celui qui a 20 ?

Luca Pacioli fait un calcul de proportionnalité par rapport aux points acquis

Niccoló Fontana dit Tartaglia,

Source : Wikipedia

Tartaglia: né vers 1500 à Brescia et mort en 1557 à Venise.

Gravement blessé au sac de Brescia (1512), il reste bègue, d'où son surnom.

Enseigne les mathématiques à Vérone, Plaisance et Venise.

L'ouvrage dont est tiré le problème est *General trattato di numere e misure,* 1556.

Tartaglia est resté célèbre pour sa résolution des équations du troisième degré.

Remarque de Tartaglia:

La résolution d'une telle question est davantage d'ordre judiciaire que rationnel et,

de quelque manière qu'on veuille la résoudre, on y trouvera sujet à litiges.

Niccolò Tartaglia, *La prima parte del general trattato di numere e misure,* 1556.

Critique de la solution de Pacioli :

Sa règle ne me parait ni bonne, ni belle, parce que s'il arrive qu'un parti ait 10 [points], et l'autre rien, et qu'on procédât selon sa règle, le premier devrait tirer le tout [toute la mise] et le second rien, ce serait tout à fait déraisonnable que, pour 10 [points], il doive tirer le tout.

On divise par 2 la mise :

$\frac{64}{2} = 32$ €

On divise cette somme par le nombre de points requis pour gagner, ici il faut 3 points

$\frac{32}{3} \simeq 10,66$ €

On calcule le nombre de points d'écart entre les deux joueurs, ici il y a un point d'écart.
Comme Ariane a 1 point de plus que Bernard, elle a $\frac{1}{3}$ de points nécessaire pour gagner ~~de~~ en plus.
Elle empoche donc $\frac{1}{3}$ des 32 € qu'a Bernard

$32 - 10,6 = 21,4$ € pour Bernard

$32 + 10,6 = 42,6$ € pour Ariane

Deuxième Situation

Ariane a $1/3$ des points Bernard à $0/3$ des points

Il reste donc $\frac{2}{3}$ des points que l'on repartie alors chez les deux joueurs, ainsi on retombe sur les mêmes sommes que dans la première situation. De plus Ariane aura ainsi $\frac{1}{3}$ de plus de la somme que Bertrand, ce qui correspond bien à la repartition des points.

Ariane : 42,7€

Bernard : 21,3 €

Mais cette méthode ne fonctionne pas car dans certaines situations comme dans le cas ou Ariane a 3 points sur 4 et Bertrand 2 points sur 4 ; cette methode ne fonctionne pas.

Ariane a $1/3$ de points de plus que lui, donc elle aura $1/3$ de la somme de plus que lui.

Soit S (~~la~~ mise) = 64 €

x le gain de Bernard.

$$x64 + (x64 + \frac{1}{3}64) = 64$$

$$2x64 + \frac{1}{3}(64) = 64$$

$$128x + \frac{1}{3}(64) = 64$$

$$128x = 64 - \frac{1}{3}(64)$$

$$128x = \frac{128}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

Sachant qu'au maximum, le score final serait de 3-2. Fériane ayant gagné un point sur cette partie, elle emporte $1/5$ de la mise. De plus, le reste de la mise est divisé équitablement entre les deux joueurs, soit $2/5$ chacun, Fériane emporte donc $3/5$ de la mise et Bertrand emporte $2/5$ de la mise.

Mettons nous dans la situation où la partie est en 5 points et le score est de 3-2 pour Fériane. Si l'on prenait la méthode précédente, Fériane se retrouverait avec $3/5$ et Bernard $2/5$. Or, il manque toujours 2 points à Fériane et 3 points à Bernard pour arriver à la victoire, comme dans le cas précédent (partie à 3 points). Ils ont donc autant de chances de gagner le jeu s'ils le finissaient. Mais la répartition d'argent n'est pas la même dans le cas précédent alors que les chances sont les mêmes.

On établis le nombre de partie qu'il reste à jouer pour qu'il y ait un gagnant.

- Arianne est à 2 points de la victoire donc à 2 parties de la victoire dans l'optique où elle gagnerait à chaque partie.
- Bernard, lui, est à 3 points de la victoire donc à 3 parties de la victoire dans l'optique où il gagnerait chaque partie.

Etant donné qu'il reste 2 points à obtenir à Arianne pour qu'elle gagne et il en manque 3 à Bernard pour qu'il gagne alors Arianne va prendre la majorité des points.

Ainsi Arianne va prendre $\frac{3}{5}$ de la mise et Bernard va prendre $\frac{2}{5}$.

De ce fait, à partir des points restants, 3 pour Bernard et 2 pour Ariane, on constate qu'il y a 5 points en tout. Ariane se retrouve avec 3/5 de la somme et Bernard 2/5.

On fait une methode qui prend en compte le nombre de points qu'il faut pour gagner la partie

Ainsi Arianne a 1 point qu'il reste pour gagner et Bernard

2. En tout il reste 3 points pour qu'ils arrivent a 3-3.

On fait une methode qui prend en compte le nombre de points qu'il faut pour gagner la partie

Ainsi Arianne a 1 point qu'il reste pour gagner et Bernard

2. En tout il reste 3 points pour qu'ils arrivent a 3-3.

Jérôme CARDAN(Pavie 1501-Rome 1576)

•Etudie à Pavie, puis à Padoue.
•Diplôme de médecine
•Grande renommée de médecin (chaire à Pavie, puis Bologne, pension à vie du pape Pie V)
•Ecrit plus de 200 ouvrages (médecine, religions, musique, mathématiques)
•Enseigne les mathématiques à Milan (1534-1543)

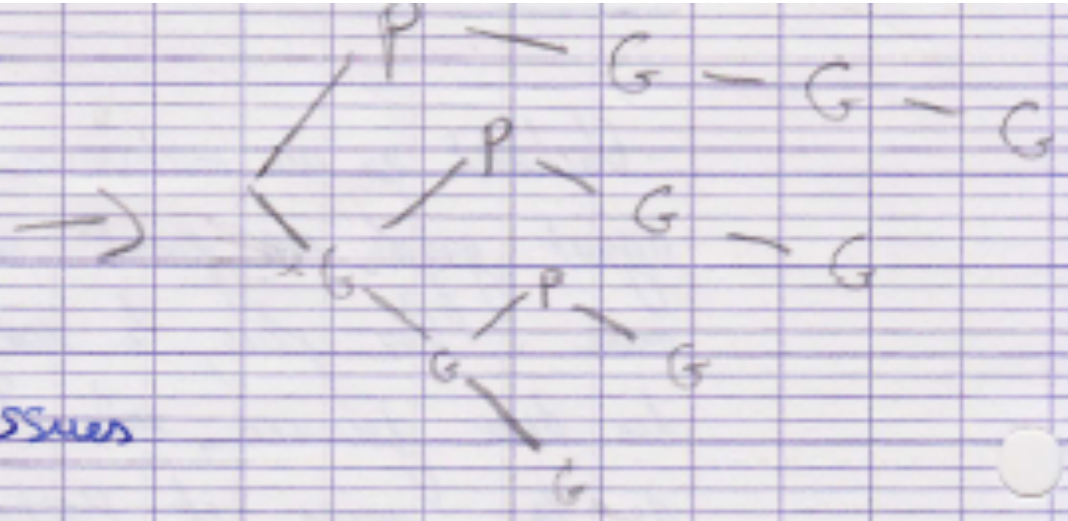
Ouvrages les plus connus en mathématiques :
•*Practica arithmetice* (1539)
•*Ars Magna* (1545)

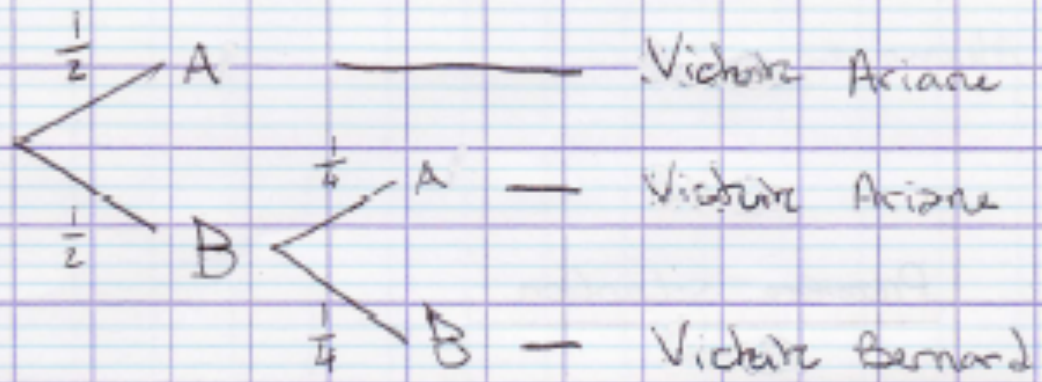
Cardan compare entre eux des exemples différents.

Il est le premier à comprendre qu'il faut considérer le nombre de parties manquantes :
Quant à la théorie des jeux, il faut savoir que dans les jeux il ne faut considérer que le terminus ad quem

Nous connaissons les résultats (donc les points
2 et 1 appartenant respectivement à Ariane et
à Bernard). Ces résultats sont immuables et ne
peuvent pas être modifiés.
Ainsi, nous devions plutôt nous interresser aux
résultats possibles, qui auraient pu se produire si
ils avaient continué la partie.

Il y a 4 issues
possibles pour que
B gagne sur 10 issues
au total donc
B prend $\frac{4}{10}$ èmes de la somme
A // $\frac{6}{10}$ èmes // //

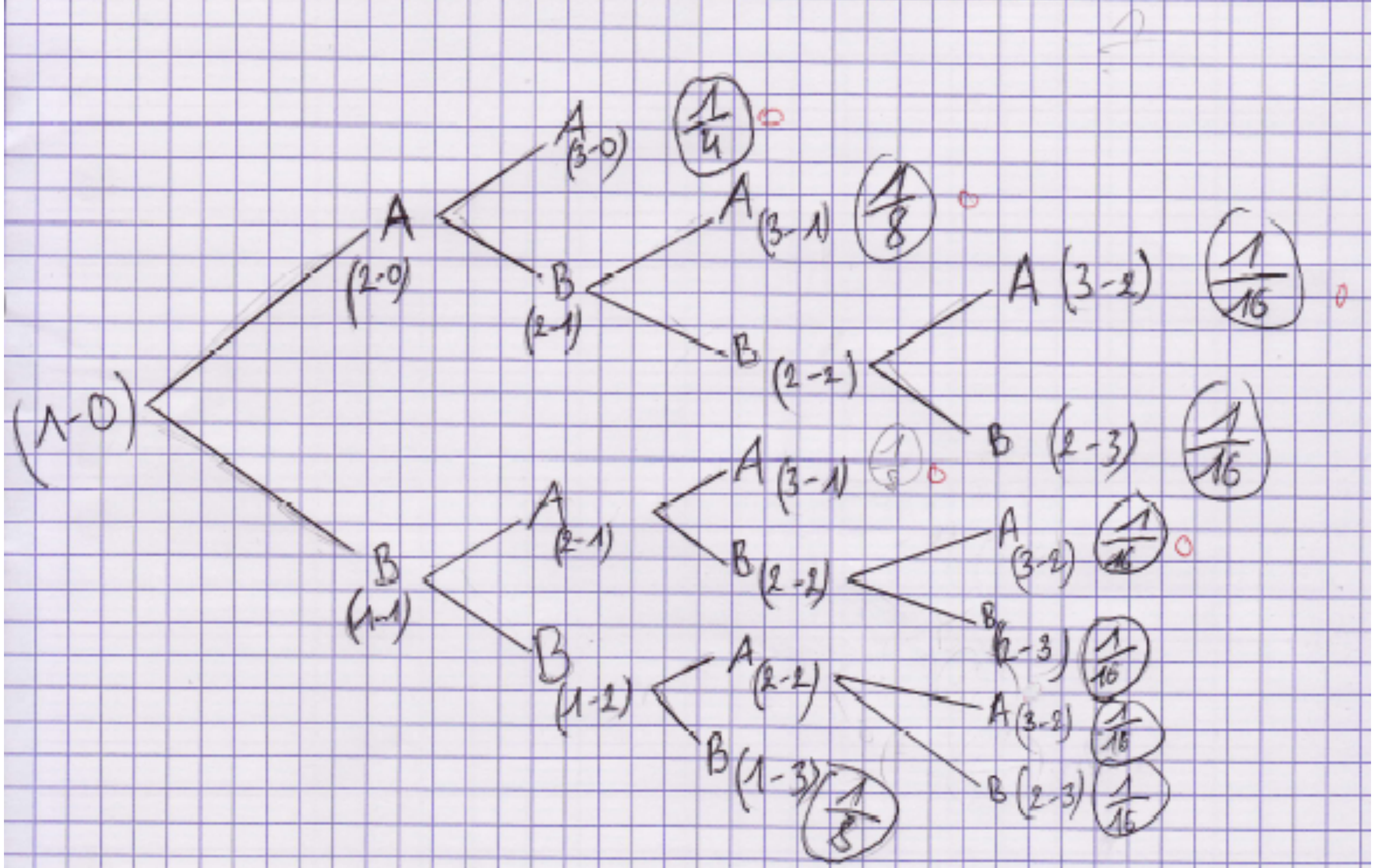




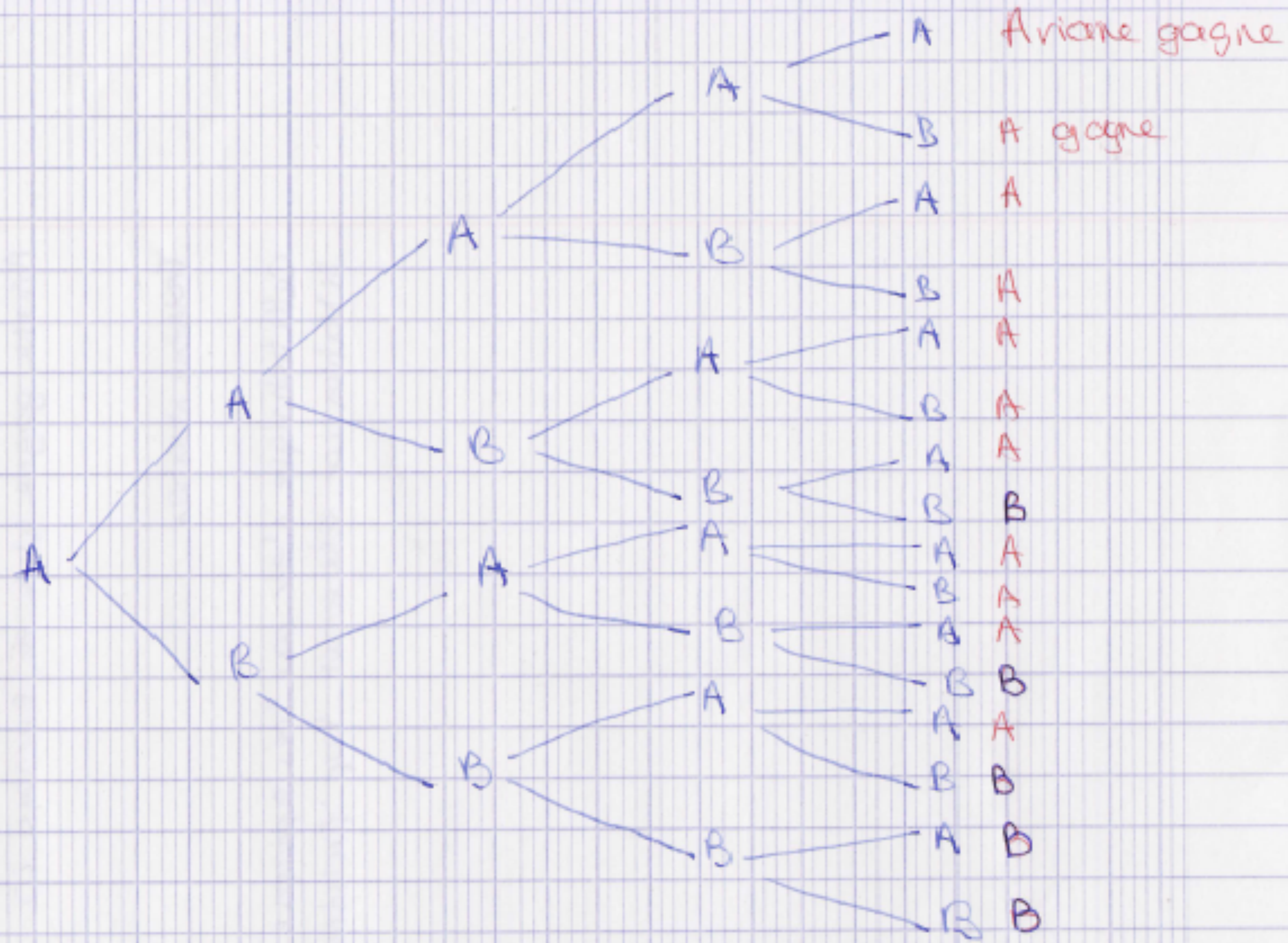
Ariane a alors $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=75\%$ de chance de gagner tandis que Bernard 25%. On leur assigne donc un montant en fonction de leur pourcentage le chance de gagner soit

Pour Ariane : $\frac{3}{4} \times 64 = 48$ €

Pour Bernard : $\frac{1}{4} \times 64 = 16$ €



(1-0)
A (2-0)
A (3-0)
1/4
B (2-1)
A (3-1)
1/8
B (2-2)
A (3-2)
1/16
B (2-3)
1/16
B (1-1)
A (2-1)
A (3-1)
B (2-2)
A (3-2)
1/16
B (2-3)
1/16
B (1-2)
A (2-2)
A (3-2)
1/16
B (2-3)
1/16
B (1-3)
1/8


Ariane gagne
A gagne

Nombre d'issues favorables pour Ariane : 11

Bernard : 5

Issues totales : 16

Lettre de Pascal à Fermat du 29 Juillet 1654 (1)

1. L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse: j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval: mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion.

Lettre de Pascal *à Fermat du 24 Août 1654* (1)

Voici comment vous procédez quand il y a *deux* joueurs:
Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque *deux* parties au premier et *trois* au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.
Il est aisé de supputer que ce sera en *quatre* parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer: ils en peuvent avoir *seize*...

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Suite de la lettre de Pascal du 24 Août 1654

Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en *quatre* parties, vu que, quand il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue *quatre* parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que *deux* ou *trois,* ou à la vérité peut-être *quatre;*

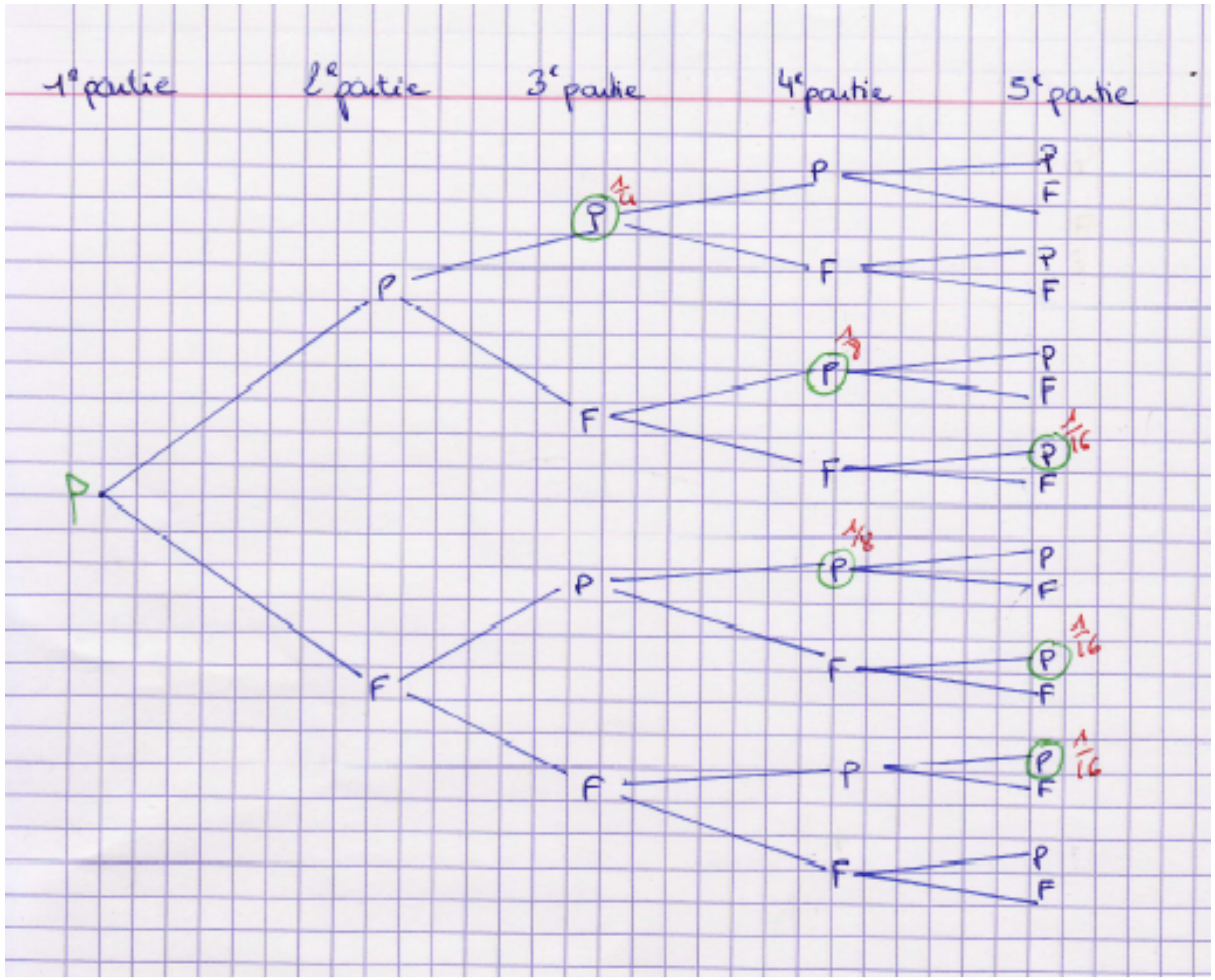
Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera *quatre* parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

… je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte:

N’est-il pas vrai que si deux joueurs se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue *quatre* parties complètes …, le parti doit être, tel que nous avons dit …?

Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les *quatre* parties.

Je lui dis donc ainsi:
N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer <les> quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car, si le premier gagne les deux premières parties de *quatre* et qu'ainsi il ait gagné, refusera--t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné ? Car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.
Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu' un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières: donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré: donc il est juste aussi en l'autre cas.
Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.



1e partie
2e partie
3e partie
4e partie
5e partie

$3^{ème}$ situation :

Il peut se jouer au maximum 15 parties or une a déjà été jouée. Il reste donc au maximum 14 parties à jouer

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès. $X \sim \mathcal{B}\left(14, \frac{1}{2}\right)$

$$P(X \geqslant 7) = 1 - P(X < 7)$$
$$= 1 - P(X \leqslant 6)$$
$$\simeq 0,6$$

Marin Mersenne (1588-1648)

Source : Wikipedia

Blaise Pascal
(Clermont 1622- Paris 1663)

Source : Wikipedia

Quelques travaux de Pascal en science

- 1640 : Essai sur les sections coniques
- 1642-1645 : invention d'une machine arithmétique
- 1647-1648 : expériences sur la pression atmosphérique et le vide
- 1654 : correspondance avec Fermat sur le hasard
- …et bien d'autres

Pierre de Fermat

(Beaumont de Lomagne 1601- Castres 1665)

Source : Wikipedia

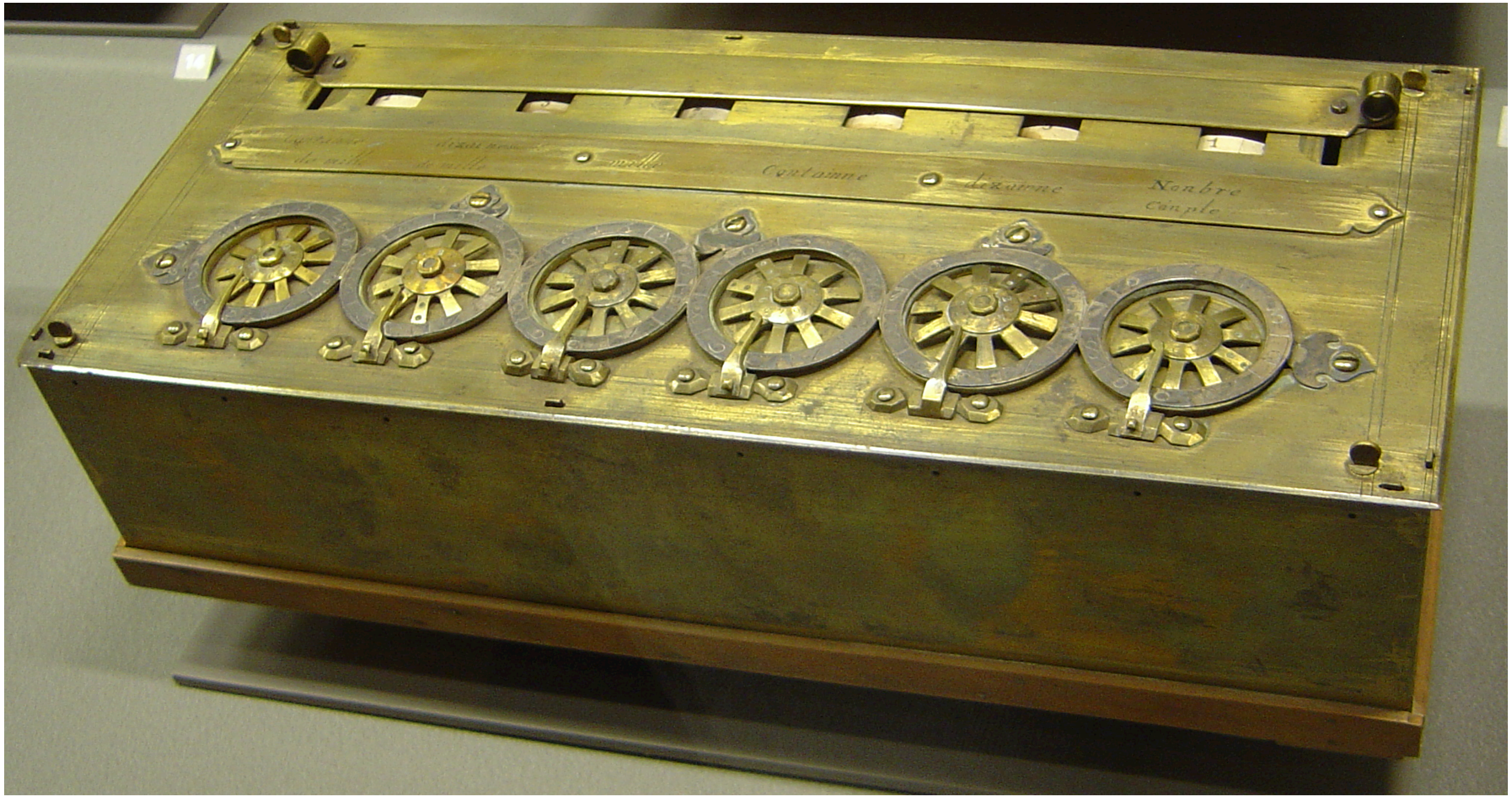
Des Travaux en science

Précurseur dans de nombreux domaines :

- Probabilités
- Calcul infinitésimal (recherche de tangentes, minimum, maximum,…)
- Optique
- Théorie des nombres

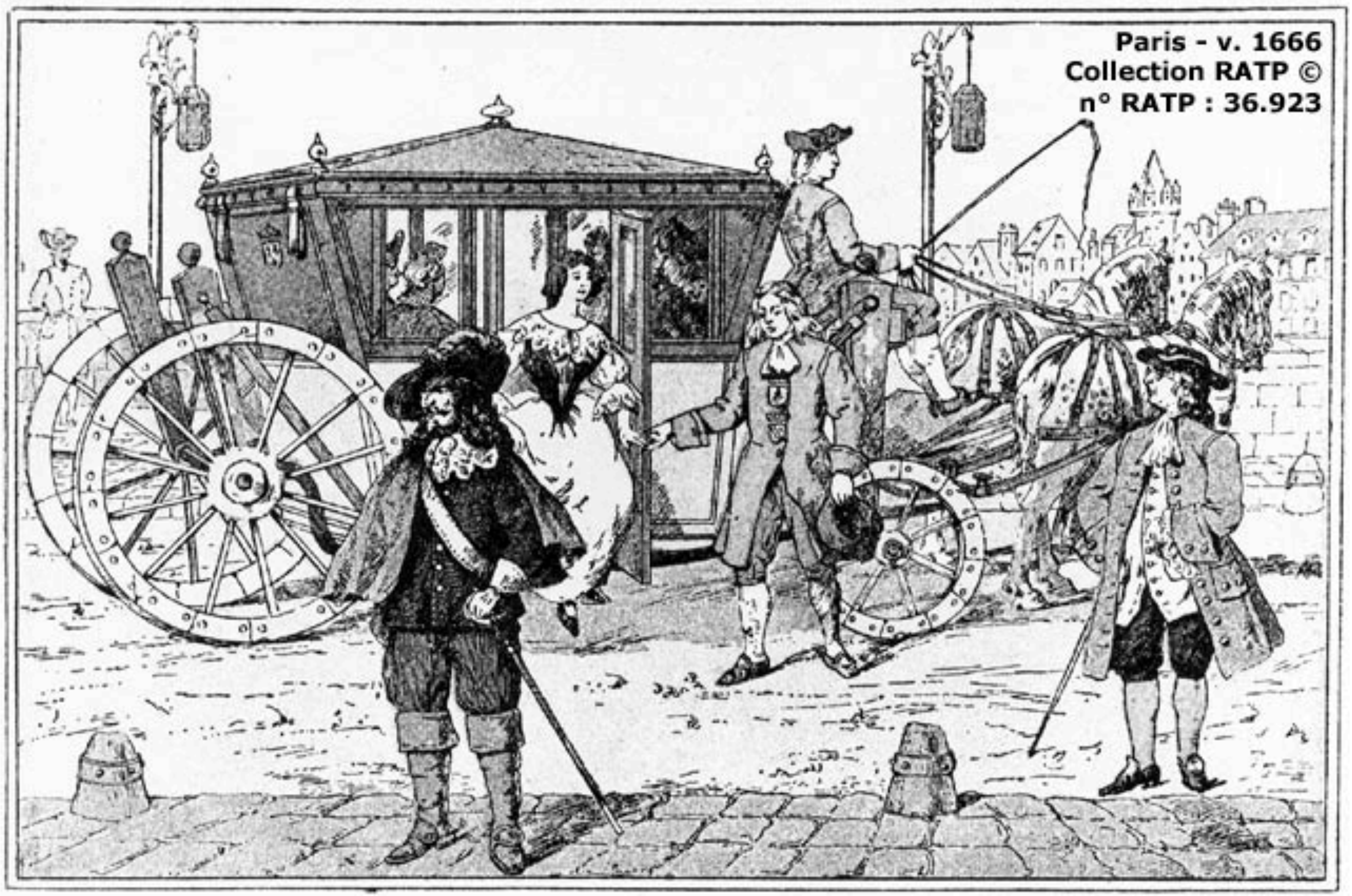
"Machine à calculer de Blaise Pascal sans sous ni deniers", 1642, Musée des Arts et Métiers,Photo David

Monniaux (Source : wikipedia)



Et aussi …

- *Les Provinciales* lettres anonymes écrites pour défendre le janséniste Arnauld
- Ecrits philosophiques : *Pensées*
- *Les carrosses à cinq sols (1662)*



Paris, XVIIe siècle : carrosse à cinq sols de Pascal, premier transport urbain en commun. Le service disparaît en 1677

Des références

Sur le site : http://www.jehps.net/juin2007.html

Ernest COUMET: La théorie du hasard est-elle née par hasard ? *Annales Economies, Sociétés, Civilisations* 25 pp574-598 (1970)

Ernest COUMET: Le problème des partis avant Pascal *Archives internationales d'histoire des sciences*,18/73,pp245-272 (1965)