MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques

Académie d'Amiens

Mardi 23 mars 2021 de 13h00 à 17h10

Pause de 15h00 à 15h10

Première générale spécialité mathématiques

Énoncés de la première partie de 13h00 à 15h00

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice national 1

Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier

On rappelle qu'on nombre entier m est un multiple d'un nombre entier d s'il existe un nombre entier q tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un diviseur de m. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier n.

1. Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2 021?
2. Quelle est la somme des diviseurs de 6 ? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2 021 ?

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note $N(n)$ le nombre des diviseurs de n, et $S(n)$ la somme des diviseurs de n.
3. Pour chacun des nombres 6, 101, 361, 2 021 vérifier l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

4. À tout diviseur d d'un entier n non nul on associe l'entier q tel que $n = dq$. Si les diviseurs de n sont $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.
a. Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{N(n)-1} + 1$
b. Si a et b sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1$$

c. En déduire, pour des nombres d et q tels que $dq = n$, l'inégalité

$$d + q \leq n + 1$$

d. En déduire finalement que l'inégalité

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel n non nul.

5. ***a.*** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs d de n, l'égalité

$$d + q = n + 1$$

est réalisée.

b. En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*).

c. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice national 2

Entiers N $-$ décomposables

On donne un entier N supérieur ou égal à 1.
On dit qu'un entier naturel k est N $-$décomposable s'il existe des entiers naturels q et r tels que :

$$(S) \quad \begin{cases} k = q + r \\ k^2 = qN + r \end{cases}$$

Par exemple, le nombre 5 est $21-$ décomposable, puisque $\begin{cases} 5 = 1 + 4 \\ 5^2 = 1 \times 21 + 4 \end{cases}$, le nombre 28 est 64 $-$décomposable, puisque $\begin{cases} 28 = 12 + 16 \\ 28^2 = 12 \times 64 + 16 \end{cases}$.

A. Quelques exemples

1. ***a.*** Le nombre 7 est-il 22 $-$décomposable ? Est-il 10 $-$décomposable ?
b. Le nombre 45 est-il 100 $-$décomposable ?

2. ***a.*** Justifier qu'il y a exactement deux nombres 1 $-$décomposables.
b. Justifier qu'il y a exactement trois nombres 2 $-$décomposables.

3. Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
a. Le nombre N est-il N $-$décomposable ?
b. Prouver que $N-1$ est N $-$décomposable.
c. Prouver que si $N \geq 4$, alors 2 n'est pas N $-$décomposable.

B. Une étude des nombres *N* $-$décomposables

Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
1. ***a.*** Prouver que si k est N $-$décomposable, alors $0 \leq k \leq N$.
b. Quels sont les entiers 3 $-$décomposables ? Quels sont les entiers 4 $-$décomposables ?

2. Prouver que si $N \geq 2$ et si k est N $-$décomposable, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers vérifiant le système (S).
3. ***a.*** Soit k un nombre N $-$décomposable. Justifier qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$.
b. Prouver que, réciproquement, si k est un entier naturel et qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$, alors k est N $-$décomposable.
c. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est 2^{2p} $-$décomposable.

4. Prouver que si k est N $-$décomposable, alors $N-k$ est N $-$décomposable.

5. Dans cette question, on suppose que N est pair et que $N \geq 4$. Prouver que $\frac{N}{2}$ n'est pas N $-$décomposable.

6. Justifier que, pour tout $N \geq 3$, il y a un nombre pair d'entiers N $-$décomposables.

7. Dans cette question, on suppose que $N-1$ est un nombre premier. Déterminer tous les entiers N $-$décomposables.

8. On donne un entier k supérieur ou égal à 2. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers N tels que k soit N $-$décomposable.