

Éléments de corrections des exercices académiques Olympiades 2021

Exercice sur les nombres dociles :

1)

- a) $7+2014=2021$
- b) $79+1942=2021$
- c) $493+1528=2021$

2)

- a) $12+3=15$ donc 15 est docile.
- b) $215=100+100+12+3=112+103$ donc 215 est docile.

De même, $2415=1212+1203$ donc 2415 est docile. $1415 = 712 + 703$.

- c) d est docile donc il existe deux entiers positifs a et b tels que $a < b$ avec $d=a+b$,
 $s(a) = s(b)$.

$$2n \times 10^p + d = n \times 10^p + n \times 10^p + a + b = n \times 10^p + a + n \times 10^p + b.$$

Comme $d < 10^p$, a et b aussi donc $s(n \times 10^p + a) = s(a) + s(n)$ et $s(n \times 10^p + b) = s(b) + s(n)$.

Donc, comme $s(a) = s(b)$, $s(n \times 10^p + a) = s(n \times 10^p + b)$ et donc $2n \times 10^p + d$ est docile.

3)

- a) Il calcule la somme des chiffres du nombre n .
- b)

```
def decomposition(n) :  
    for k in range(n//2) :  
        if somme(k)==somme(n-k) :
```

4)

- a) $\rightarrow 9=1+8=2+7=3+6=4+5$ et aucune décomposition ne convient donc 9 est rebelle.

\rightarrow Si $999 = abc + edf$ avec a,b,c,d,e,f des chiffres entre 0 et 9 et $abc > edf$ alors :

$$a+e = 9, b+d = 9 \text{ et } c+f = 9$$

Ainsi, a et e sont de parité différente, b et d sont de parité différente et c et f sont de parité différente.

Donc si $\{a; b; c\}$ contient un nombre pair de nombres impairs alors $\{d; e; f\}$ contient un nombre impair de nombres impairs et si $\{a; b; c\}$ contient un nombre impair de nombres impairs alors $\{d; e; f\}$ contient un nombre pair de nombres impairs.

Donc les sommes $\$a+b+c\$$ et $\$d+e+f\$$ sont de parité différente, elles ne peuvent donc pas être égales. Donc 999 est un rebelle.

- b) Selon le même raisonnement que 999, nous pouvons montrer que tout nombre formé que de 9 avec un nombre impair de 9 est rebelle. Il y en a donc une infinité.

Exercice « une plus longue sous-suite monotone »

Partie A :

1. Une suite de nombres se notera d'une façon générale $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$ et on notera $M[i]$ une plus longue sous-suite croissante se terminant par a_i .

a) Soit S la suite de 10 nombres $[7, 4, 1, 5, 8, 2, 1, 6, 9, 8]$.

- Les plus longues sous-suites se terminant par a_7 sont $[1, 2, 6]$, $[1, 1, 6]$, $[1, 5, 6]$ et $[4, 5, 6]$

- Proposer une sous-suite croissante de longueur 4 : $[1, 5, 6, 9]$ par exemple

b) Soit S la suite de 5 nombres $[10, 8, 7, 5, 6]$.

$M[0]=[10]$, $M[1]=[8]$, $M[2]=[7]$, $M[3]=[5]$ et $M[4]=[5, 6]$ donc une longueur maximale de 2

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons $S=[a_0, a_1, \dots, a_{(n^2)}]$ une suite de n^2+1 nombres.

Supposons qu'il n'existe pas $n+1$ nombres classés dans l'ordre croissant.

a. Justifier que les sous-suites $M[i]$ (avec $0 \leq i \leq n^2$) ont des longueurs comprises entre 1 et n .

La longueur minimale est 1, la longueur maximale est n car on n'a pas $n+1$ nombres classés dans l'ordre croissant.

b. On regroupe les suites $M[i]$ de mêmes longueurs.

Montrer qu'il existe au moins $n+1$ sous-suites ayant la même longueur.

Si on avait toujours au plus n suites de même longueur, comme on n'a que n longueurs possibles (entre 1 et n), cela ferait au maximum n^2 suites $M[i]$ alors qu'il y en a n^2+1 .

Donc on a nécessairement au moins $(n+1)$ suite de même longueur.

c. Appelons b_0, b_1, \dots, b_n les nombres qui terminent ces $n+1$ suites de même longueur (b_0, b_1, \dots, b_n sont pris dans l'ordre d'apparition de la suite S). Justifier pourquoi on a $b_0 > b_1$.

$b_0 > b_1$ sinon la suite se terminant par b_0 pourrait se prolonger par b_1 et la sous-suite se terminant par b_1 ne pourrait pas avoir la même longueur.

d. De la même façon, on peut montrer que $b_1 > b_2 > b_3, \dots > b_n$. Que peut-on en déduire ?

On a donc extrait une sous-suite décroissante $b_0 > b_1 > b_2 > b_3, \dots > b_n$ de longueur $n+1$.

S'il n'y a pas de sous-suite croissante de longueur n+1, alors on peut trouver une sous-suite décroissante de longueur n+1

Partie B :

Initialisation : S=[4,3,6,1,8,5,10,3,9,7] M=[[]]		
i=0	M[0]=[4]	M=[[4]]
i=1	M[1]=[3]	M=[[4],[3]]
i=2	M[2]=M[1]+[6]=[3,6]	M=[[4],[2],[3,6]]
i=3	M[3]=[1]	M=[[4],[2],[3,6],[1]]
i=4	M[4]=[3,6]+[8]=[3,6,8]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[3,6,8]]
i=5	M[5]=[1,5]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[2,6,8],[1,5]]
i=6	M[6]=[3,6,8]+[10] =[2,6,8,10]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[2,6,8],[1,5], [2,6,8,10]]
i=7	M[7]=M[3]+[3]=[1,3]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[2,6,8],[1,5], [2,6,8,10],[1,3]]
i=8	M[8]=[3,6,8]+[9] =[3,6,8,9]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[3,6,8],[1,5], [3,6,8,10],[1,3],[3,6,8,9]]
i=9	M[9]=[1,3,7]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[3,6,8],[1,5], [3,6,8,10],[1,3],[3,6,8,9],[1,3,7]]

1. On en déduit qu'une plus longue sous-suite croissante de S sera [3,6,8,9] .

2.

```
def plssc(S) :
    M=[[[] for i in range(len(S))]          # on prepare une liste vide pour M

    M[0]=[S[0]]                             # cas de base

    for i in range(1,len(S)):
        M[i]=[S[i]]
        for j in range(0,i):
            if M[j][-1]<=S[i]:
                if len(M[j])+1>=len(M[i]):
                    M[i]=M[j]+[S[i]]

    return M
```

