∽ Mardi 24 février ∾

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$. 0,5
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$. 1
3. Montrer que, pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2-4\right)}{x}$. 1
4. Étudier les variations de f sur $]0~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet. 1

   On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0~;~+\infty[$.
5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α). 1
6. On admet que, sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. 0,5
7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0~;~+\infty[$ par : 1

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans cet exercice, vous devez dire si l'affirmation proposée est Vraie ou Fausse en argumentant la réponse. Une réponse sans argumentation ne rapporte aucun point.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

Affirmation 1 : la fonction f est une solution sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$

On considère la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (2x+1)\ln(x)$.

Affirmation 2 : La fonction F est une primitive de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.

Affirmation 3 : la suite (v_n) est décroissante.

On considère une fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $h''(x) = x\ln(x) - 3x$

Affirmation 4 : la fonction h est convexe sur $[e^3\,;\,+\infty[$.