

∞ Mardi 4 février ∞  
**ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES**

**EXERCICE 1**

**6 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] -\infty ; 1[$  par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $] -\infty ; 1[$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère.

1.   **a.** Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 1.  
      **b.** En déduire une interprétation graphique.

/0,5

2. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

/0,25

3.   **a.** Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] -\infty ; 1[$ , on a

/1,5

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

- b.** Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $] -\infty ; 1[$ .

4. On admet que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] -\infty ; 1[$ , on a

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}.$$

/2,5

- a.** Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $] -\infty ; 1[$ .  
**b.** Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.  
**c.** En déduire que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] -\infty ; 1[$ , on a :

$$e^x \geq (-2x-1)(x-1).$$

/1,25

5.   **a.** Justifier que l'équation  $f(x) = -2$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $] -\infty ; 1[$ .  
      **b.** À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

**EXERCICE 2**

**5 points**

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit les évènements suivants :

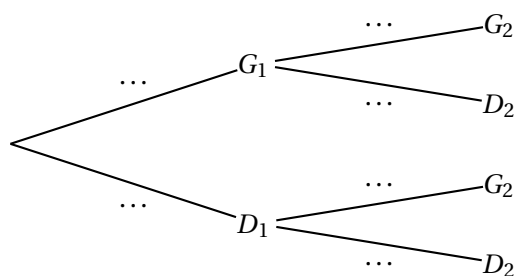
- $G_n$  : « Léa gagne la  $n$ -ième partie de la journée » ;
- $D_n$  : « Léa perd la  $n$ -ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $g_n$  la probabilité de l'évènement  $G_n$ .

On a donc  $g_1 = 0,5$ .

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle  $p_{G_1}(D_2)$ ? /0,25

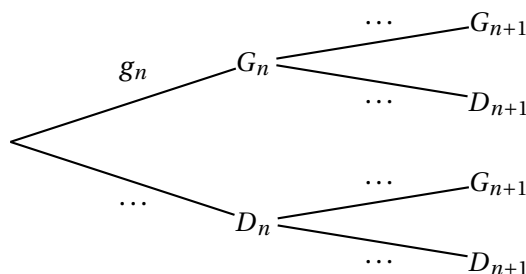
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée : /0,5



3. Calculer  $g_2$ . /0,5

4. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les  $n$ -ième et  $(n + 1)$ -ième parties de la journée. /0,5



b. Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul, /0,5

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $v_n = g_n - 0,4$ .

a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique. /0,75  
On précisera son premier terme et sa raison.

---

b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul : /0,5

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite  $(g_n)$ . /0,75

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite  $(g_n)$ . /0,5

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier  $n$  tel que  $g_n - 0,4 \leq 0,001$ . /0,5

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite  $(g_n)$  sont tous inférieurs ou égaux à  $0,4 + e$ , où  $e$  est un nombre réel strictement positif. /0,5

```
1 def seuil(e) :  
2     g = 0.5  
3     n = 1  
4     while ... :  
5         g = 0.5 * g + 0.2  
6         n = ...  
7     return (n)
```

---

### EXERCICE 3

4 points

Dans les deux questions qui suivent, on considère les points  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;4;3)$ ,  $C(4;4;1)$  et  $D(0;0;4)$ .

Dire si l'affirmation proposée est vraie ou fausse en argumentant.

1. les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.
2. les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.

Dans les deux questions qui suivent, vous devez recopier le numéro de la question et la bonne réponse : c'est un QCM avec une seule bonne réponse.

3. On considère qu'un joueur de foot réussit 80 % de ses penaltys. Il tente 20 penaltys de suite, et on considère que la réussite ou l'échec d'un penalty n'influe pas sur la réussite ou l'échec du suivant. La probabilité qu'il en réussisse 15 ou plus est environ égale à :

- a. 0,630                      b. 0,370                      c. 0,804                      d. 0,175

4. Soit  $a$  un nombre réel strictement positif; alors :  $5 \ln \sqrt{e} + e^{2 \ln(a)}$  est égal à :

- a.  $\sqrt{5} + 2a$                       b.  $\sqrt{5} + a^2$                       c.  $2,5 + 2a$                       d.  $2,5 + a^2$