

CORRIGE DS TERMINALE du 3 février 2026

Exercice 1

1. a. La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} donc : $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e^1 = e > 0$.
 Par limite de la somme, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$, et comme on travaille sur $] -\infty ; 1[$, on a $x - 1 < 0$. (on peut noter $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0^-$).
 Par limite du quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.
- b. On en déduit que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote verticale, d'équation $x = 1$.

2. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$;

Par limite de la somme, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$,

Par limite du quotient, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que \mathcal{C} admet également une asymptote, d'équation $y = 0$, au voisinage de $-\infty$.

3. a. f est dérivable sur $] -\infty ; 1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\infty ; 1[, \quad f'(x) &= \frac{e^x \times (x-1) - e^x \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{e^x \times (x-1-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

- b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} , et pour tout x dans $] -\infty ; 1[$, $(x-1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x-2)$.

$x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$, donc sur $] -\infty ; 1[$, $(x-2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.

Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$, et donc, on a le tableau de variations suivant (avec les limites justifiées aux questions 1. a. et 2.) :

x	$-\infty$	1
signe de $f'(x)$	⋮	-
variations de f	0	→ $-\infty$

4. a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.

Comme, pour tout x dans $] -\infty ; 1[$, on a $(x-1) < 0$ et donc $(x-1)^3 < 0$ et $e^x > 0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : $x^2 - 4x + 5$.

Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x .

Rem. On peut écrire :

$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$: le trinôme est positif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $] -\infty ; 1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $] -\infty ; 1[$.

b. Pour déterminer l'équation de T , il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

- $f'(0) = \frac{(0-2)e^0}{(0-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2$;
- $f(0) = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$.

La formule classique donne une équation pour T :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff y = -2x - 1$$

L'équation réduite de T est donc : $y = -2x - 1$.

c. Puisque f est concave sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$, la courbe \mathcal{C} est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T , sur cet intervalle.

Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe \mathcal{C} (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T , l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x - 1$, d'après la question précédente).

On en déduit donc : $x \in] -\infty ; 1[\implies f(x) \leq -2x - 1$

$$\implies \frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$$

$$\implies e^x \geq (x-1)(-2x-1)$$

car sur $] -\infty ; 1[$, $x-1 < 0$

$$\implies e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.

d. a. La fonction f est :

- continue sur $] -\infty ; 1[$ (car dérivable sur cet intervalle);
- strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$ (d'après la question 3. b.);
- telle que -2 est une valeur intermédiaire entre $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_1 f = -\infty$;

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.

b. Comme on a repéré à la question 4. b. que $f(0) = -1$, on sait que la solution sera à chercher dans l'intervalle $]0 ; 1[$.

À l'aide de la calculatrice, par balayage, on a :

- $f(0,31) \approx -1,98 > -2$;
- $f(0,32) \approx -2,03 < -2$;

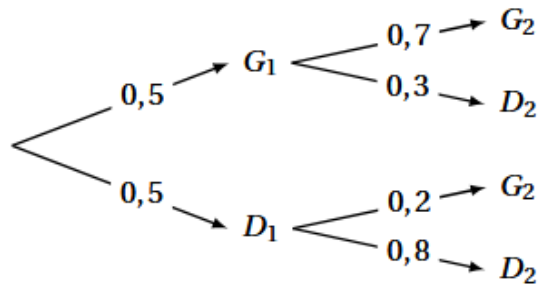
Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $0,31 < \alpha < 0,32$.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30%.

On a donc $P_{G_1}(D_2) = 0,3$

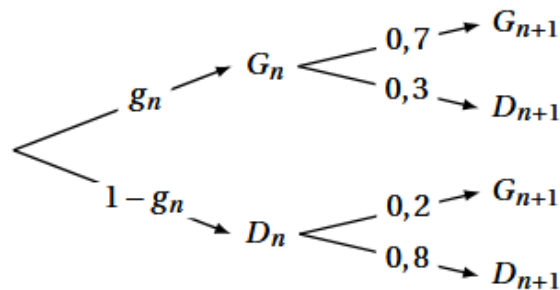
2. On a l'arbre suivant :



3. Les événements G_1 et D_1 partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,35 + 0,1 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

4. a. On a l'arbre suivant :



- b. Pour tout entier naturel n non nul, les événements G_n et D_n déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 \\ &= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\ &= 0,5g_n + 0,2 \end{aligned}$$

On arrive bien au résultat annoncé.

5. a. Soit n un entier non nul.

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\ &= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (g_n) \\ &= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0,4 \iff g_n = v_n + 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\ &= 0,5v_n\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$

b. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$$

Or pour tout entier naturel n non nul $g_n = v_n + 0,4$ donc $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

6. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4 \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (0,5 - 1) \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5) \\ &= -0,1 \times 0,5^n\end{aligned}$$

or $0,5 > 0$ et $0,1 > 0$ donc $g_{n+1} - g_n < 0 \iff g_{n+1} < g_n$

La suite (g_n) est strictement décroissante.

7. $-1 < 0,5 < 1$, donc on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n = 0$, donc, par limite du produit et de la somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,4.$$

Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40% des cas.

8. Déterminons les valeurs de n pour lesquels $g_n - 0,4 \leq 0,001$

$$\begin{aligned}g_n - 0,4 \leq 0,001 &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 - 0,4 \leq 0,001 \\ &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001 \\ &\iff 0,5^{n-1} \leq 0,01 \quad \text{car } 0,1 > 0 \\ &\iff \ln(0,5^{n-1}) \leq \ln(0,01) \quad \text{par croissance de la fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff (n-1) \ln(0,5) \leq \ln(0,01) \\ &\iff (n-1) \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \quad \text{car } \ln(0,5) < 0 \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 = \frac{-\ln(100)}{-\ln(2)} + 1 = \frac{\ln(100) + \ln(2)}{\ln(2)} = \frac{\ln(200)}{\ln(2)} \approx 7,64$ donc, n étant un entier, la plus petite valeur de n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$ est 8.

9. Le programme complété est :

```
def seuil(e):
    g = 0.5
    n = 1
    while g > 0.4 + e :
        g = 0.5 * g + 0.2
        n = n + 1
    return(n)
```

Exercice 3

1) FAUX

Les points A, B et C ne sont pas alignés car les vecteurs

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. En effet,

il n'existe aucun réel k tel que: $\vec{AB} = k \vec{BC}$, soit:

$$\begin{cases} -2 = 4 \times k \\ 4 = 0 \times k \\ 3 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = 0 \\ k = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

2) FAUX

\vec{AB} et \vec{BC} ne sont pas colinéaires: ils forment une base qui dirige le plan (ABC). Si D appartient à ce plan, alors il existe 2 réels x et y tels que $\vec{AD} = x \vec{AB} + y \vec{BC}$. Avec $\vec{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

et $\vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, on obtient le système (S):

$$\begin{cases} -2 = -2x + 4y \\ 0 = 4x \\ 4 = 3x - 2y \end{cases}$$

D'où:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 4y \\ x = 0 \\ 4 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution $(x; y)$, donc A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires.

NB: Les questions 1 et 2 peuvent être justifiées par d'autres égalités vectorielles et la résolution d'autres systèmes.

3) réponse c

$$X \sim \mathcal{B}(20; 0,8)$$

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) = \boxed{0,804}$$

4) réponse d

$$\begin{aligned} 5 \ln(\sqrt{e}) + e^{2 \ln a} &= 5 \times \frac{1}{2} \ln(e) + e^{\ln(a^2)} \\ &= 5 \times \frac{1}{2} \times 1 + a^2 \end{aligned}$$

$$= \boxed{2,5 + a^2}$$